# අනුකලනය

(1) i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + \sin x + 1} = -2\int_0^1 \frac{dt}{(t-3)(t+1)}$ බව පෙන්වීම සඳහා ටැන් $\frac{x}{2} = t$ ආදේශය භාවිත කරන්න. ඒ නයින්, මෙම අනුකලනය අගයන්න.

ii) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{3-2(t-1)^2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා $x + 1 = \frac{1}{t}$ ආදේශය භාවිත කරන්න. ඒ නයින්, මෙම අනුකලනය අගයන්න.

iii) $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)(1+x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t\,dt}{\sin t + \cos t}$ බව පෙන්වීම සඳහා x = tan t ආදේශය භාවිත කරන්න.

සයින් $t \equiv \lambda(\sin t + \cos t) + \mu(\cos t - \sin t)$ වන පරිදි $\lambda$ හා $\mu$ නියත සොයන්න. ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ මෙම අනුකලනය අගයන්න. (1975)

(2) අගයන්න.

i) අ) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}$ ආ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 t - \cos^3 t)dt$ ඇ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

ii) වක්‍රයක් මත (x, y) ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය $1/(y\sqrt{1-x^2}$ කොස් y) වෙයි. මෙම වක්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්, $[\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right), \frac{\pi}{2}]$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ද එය යන බව සාධනය කරන්න. (1976)

(3) අ) $I = \int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{x+2}}$ නම්, $I = \int \frac{du}{u^2 + \frac{1}{2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා 2x + 5 = $\sqrt{x+2} = u$ ආදේශය යොදන්න. තව ද $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(v - \frac{1}{2}\right)^2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා $2x + 5 = \frac{1}{v}$ ආදේශය යොදන්න. ඒ නයින්,

i) $a\tan^{-1} f + b$ ආකාරයෙන් , ii) $p\sin^{-1} g + q$ ආකාරයෙන් ,

I ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, b, p, q නියත වන අතර f, g යනු x හි ශ්‍රිත වෙයි.

ආ) $\tan\frac{x}{2} = t$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x + 4\sin x}$ යන්නෙහි අගය සොයන්න. (1977)

(4) i) අගයන්න. අ) $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$ ආ) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$

ii) x = සයින්$^2\,\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන් අගයන්න. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

iii) x = 3 විට y = 2 බව දී ඇති කල්හි $2(x+1)\frac{dy}{dx} = y^2 + 4$ සමීකරණය විසඳන්න. (1978)

(5) පහත සඳහන් නිශ්චිත අනුකලන අගයන්න.

අ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\cos x}$ ($t = \tan\frac{x}{2}$ යොදන්න.) ආ) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($x = \frac{1}{t}$ යොදන්න.)

ඇ) $\int_0^2 x\tan^{-1} x\,dx$ (1978)

(6) අ) $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න. ඒ නයින්,
$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ සොයන්න.

ආ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ හි අගය සොයන්න. ($t = \tan\frac{x}{2}$ යොදන්න.)

ඇ) $\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$ සොයන්න. මේ නයින් $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$ හි අගය සොයන්න.(1979 අපුරු)

(7) i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = \int_0^2 (ax^2+2x)dx$ නම් a හි අගය සොයන්න.

ii) අ) $\int_0^2 \frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ බව ද,

ආ) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = 1$ බව ද,

ඇ) $t = e^x$ ආදේශයෙන් $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \log\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ බව ද, පෙන්වන්න. (1980)

(8) i) $\tan\frac{x}{2} = t$ ආදේශය භාවිතයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = 1$ බව පෙන්වන්න. $2\sin x = \lambda(1 + \sin x) + \mu$ වන පරිදි $\lambda$, $\mu$ නියත සොයන්න. ඒනයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 2\sin x}{1+\sin x}\, dx$ අගයන්න.

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx$ අගයන්න. (1981)

(9) $x^2 = 4y$ ද $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ ද යන සමීකරණ ඇති වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයේ අඳින්න. මෙම වක්‍ර දෙකෙනුත් y – අක්ෂයෙනුත් ඇව්රී පළමු වැනි වෘත්ත පාදකයේ වූ S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය $\int_0^2 \sqrt{2-(x-1)^2}\, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx$ බව පෙන්වන්න. $S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න. (1981)

(10) i) $x = t^2$, $(t > 0)$ යන ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = 2\int_1^{\sqrt{k}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = dt = \int_1^{\sqrt{k}} t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1+t^2)}\right) dt = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{k}}{1+k} + \tan^{-1}(\sqrt{k}) - \frac{\pi}{4}$ $\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x\, dx$ අගයන්න. (1982)

(11) $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y = 2 - x^2$ යන වක්‍රවල කටු සටහන්, එකම රූපයෙහි අඳින්න. මේ වක්‍ර දෙකෙන් මායිම් වන S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය ඒකක $(\pi - 2/3)$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(12) i) $\alpha$ හා $\beta$ තාත්වික ප්‍රභින්න වන $Q(x) \equiv (x-\alpha)^2(x-\beta)$

ii) $P(x)$ හි මාත්‍රය තුනට වඩා අඩු හා

iii) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{x-\beta}$ නම්,

එවිට $A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)}$, $A_2 = \frac{P'(\alpha)}{(\alpha-\beta)} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$ හා $B_1 = \frac{P(\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}$ වේ. $\int_r^k \frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx$ අගයන්න. මෙහි $\alpha > 0$, $\beta > 0$ හා $k > r >$ උපරිම $(\alpha, \beta)$ වේ.

$\lim_{k\to\infty}\int_8^k \frac{x}{(x-2)^2(x-6)}\,dx$ පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න. (1983)

(13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මගින් අන්තර්ගත කරන ලද ක්ෂේත්‍රඵලය $\pi ab$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(14) i) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ අගයන්න.

ii) $\frac{1}{(x-1)(x^2-1)}$ හින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර $\frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$ බව පෙන්වන්න. $\int_2^k \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$, ($k > 2$) අගයන්න.

$\lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$ පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න. (1984)

(15) $y^2 = 4x$ සහ $y^2 = \frac{8}{x} - 4$ යන සමීකරණ ඇති වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයේ අඳින්න. මෙම වක්‍ර දෙක මගින් ආවෘත S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය සොයන්න. (1984)

(16) $\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\,dt$ අනුකලනය අගයන්න. මෙහි a, b හා k ධන නියතයක් වේ. $\lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\pi}{2ab}$ බව අපෝහනය කරන්න. $t = \tan x$ යයි ලිවීමෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2ab}$ බව පෙන්වන්න.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{a^2 \cos^2 + b \sin^2 x} dx$ සහ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$ යයි ගනිමු. $a^2 I + b^2 J = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. මෙය උපයෝගී කරගනිමින් I සහ J අනුකූල a සහ b ඇසුරෙන් ප්‍රකාශිත ලෙස සොයන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} dx$ අනුකලනයෙහි අගය අපෝහනය කරන්න. (1985)

(17) i) $I = \int_0^{a} \frac{x^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$ සහ $J = \int_0^{a} \frac{(x-a)^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$ යයි ගනිමු. $I = J = \frac{a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $y = e^{-x}$ ආදේශයෙන් $\int_0^{2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$ අනුකලනය අගයන්න. (1986)

(18) $y^2 (2 - x) = 4x$ සහ $y^2 = 4(2 - x)$ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර එකම රූපයක දළ සටහන් කරන්න. වක්‍ර දෙක මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය සොයන්න. (1986)

(19) $\int_0^{a} \sin x \sin(p-x) dx = \frac{1}{2} (\sin P - P \cos P)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි P යනු නියතයක් වේ. $I = \int_0^{p} \phi(x)\, dx$ හා $J = \int_0^{p} \phi(P-x)\, dx$ යයි ගනිමු. මෙහි $\phi(x)$ යනු x හි අනුකලන ශ්‍රිතයක්ද p යනු ධන නියතයක් ද වේ. I = J බව පෙන්වන්න. $f(x)$ යනු x හි සියලු තාත්වික අගයන් සඳහා $f(x) + f(p - x) = q$ වන අයුරින් වූ x හි අනුකල්‍ය ශ්‍රිතයකි. මෙහි p (> 0) සහ q නියතයක් වේ.
i) $\int_0^{p} f(x) dx = \frac{1}{2} pq$ ii) $\int_0^{p} \sin x \sin(p-x) f(x)\, dx = \frac{1}{4} q (\sin p - p \cos p)$ බව පෙන්වන්න. (1987)

(20) පිළිවෙළින් $y = 1 - \frac{3}{x+3}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$ මගින් දෙනු ලබන $C_1$ සහ $C_2$ වක්‍ර දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ සහ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පෙන්නුම් කරමින් මෙම වක්‍ර දෙකෙහි ප්‍රස්ථාර එකම රූපයක අඳින්න. ප්‍රථම වෘත්ත පාදය තුළ, $C_1$ සහ $C_2$ මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන පරිමිත පෙදෙසේ S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය $\frac{7}{2} \log 5 - 3 \log 3 - 2$ බව පෙන්වන්න. (1987)

(21) i) $f(x)$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2 (x^2-1)}$ වේ. $\int_0^{k} f(x) dx$, (k > 0) අගයන්න. $\lim_{k \to \infty} \int_0^{k} f(x) dx$, පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\tan\theta)^2}$ අගයන්න.

ii) $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\log x)\,dx$ සහ $J = \int_{\alpha}^{\beta} \cos(\log x)\,dx$ යයි ගනිමු. $0 < \alpha < \beta$ වේ. $I, J - \beta$ $\sin(\log \beta) - \alpha \sin(\log \alpha)$ බව පෙන්වන්න. මෙය උපයෝගී කර ගනිමින් හා I සහ J හි තවත් රේඛීය සංයෝජනයක් සලකමින් I සහ J අගයන්න. (1988)

(22) පිළිවෙළින් $y^2 = 8x$ සහ $x^2 = 3\sqrt{3y}$ සමීකරණ වන $C_1$ සහ $C_2$ වක්‍ර දෙක එකම රූපයේ දළ සටහන් කරන්න. $C_1$ සහ $C_2$ මගින් වට වූ S වර්ගඵලය සොයන්න. (1988)

(23) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින් $\int \sin(\log x)dx$ අගයන්න. r නියතයක් වන $I = \int x^r \sin(\log x)dx$ සහ $J = \int x^r \cos(\log x)dx$ නම් $(1 + \frac{r}{2})\,I - \frac{r}{2}\,J = \frac{x^{r+1}}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + නියතයක් බව සාධනය කරන්න. $x^{r+1} \sin(\log x)$ අවකලනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන $I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\{(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් a සහ b නියත වන $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ අගයන්න.
(1989)

(24) $x^2 = 4y$ සහ $x^2 = y^3$ වක්‍රවල කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. ප්‍රථම වෘත්ත පාදය තුළ මෙම වක්‍ර දෙක මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලය සොයන්න. (1989)

(25) i) $x(1-x)^2 = (1+x)^2(x-2) + 2$ සහ $x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4$ බව සත්‍යාපනය කරන්න. ඉහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵලය භාවිත කිරීමෙන්, $\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}dx$ සහ $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ අගයන්න.
$3 < \pi < \frac{22}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) n ධන නිඛිලයක් වන විට $\int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+\pi}\int \sin\theta \cos^n\theta d\theta - \frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{3+n}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta$ අගයන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3(1 - x^2)dx$ අනුකලනය සලකා බැලීමෙන් ඔබේ ප්‍රතිඵලය නිවැරදි දැයි සොයා බලන්න. (1990)

(26) i) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x \sin^n x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x\, dx$ බව පෙන්වන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි. තවද, $n > 2$ විට, $\int_0^{\pi} x \sin^n x\, dx = (n-1)\int_0^{\pi} x \sin^{n-2} x\, dx$ බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින් $\int_0^{\pi} x \sin^4 x\, dx$ සහ $\int_0^{\pi} x \sin^5 x\, dx$ අගයන්න.

ii) $\frac{d}{d\theta}\log_e(\sec\theta+\tan\theta)=\sec\theta$ බව පෙන්වා $\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ සෙවීමට එය භාවිතා කරන්න. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$ ඇගයීම සඳහා $y=\frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$ ආදේශය භාවිතා කරන්න. (1991)

(27) $y^2=4x$ පරාවලයේත් $x^2-y^2=1$ බහුවලයේත් $x=4$ රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එකම රූප සටහනෙහි අඳින්න. $x^2-y^2\leq 0$ සහ $y^2-4x\leq 0$ වන සේ වූ $S_1$ පෙදෙස සටහන් කර $S_1$ හි පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න. (1991)

(28) අ) $a>0$ නම්, $\frac{d}{dx}(a^x)$ ලබාගෙන c නියතයක් විට, $\int_0^c\frac{a^x}{a^x+1}dx$ අගයන්න. $0<c<\frac{\pi}{2}$ විට, $I=\int_{-c}^{c}\frac{\cos x\,dx}{1+a^x}$ සහ $J=\int_{-c}^{c}\frac{a^x\cos x\,dx}{1+a^x}$ නම්,

i) $t=-x$ ආදේශන යෙදීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $I=J$ බව පෙන්වන්න.

ii) $I+J$ ලබාගන්න. ඒනයින් $c=\frac{\pi}{6}$ විට J හි අගය ලියන්න.

ආ) $\int_0^1\frac{dx}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}}}$ අගයන්න. (1992)

(29) $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$ නම්, $y=f(x)$ සහ $y=\frac{1}{f(x)}$ වක්‍රවල කටු සටහන් එකම රූප සටහනෙහි අඳින්න. ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ඇතොත් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න. ඉහත වක්‍ර දෙකෙන් අන්තර්ගත වන R පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න. (1992)

(30) a) $\int\frac{8x+7}{2x^2+8x+10}dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයේ අනුකලනය කිරීමෙන්, $3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{3}}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}}x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

c) $x=\tan\theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ n ධන නිඛිලයක් විට $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\left[\frac{2n-3}{2n-2}\right]\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ බව සාධනය කරන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න. (1993)

31) $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ මගින් C වක්‍රයක් ගෙන දේ.

i) $0\leq y\leq 2$ සහ ii) $x\to\pm\infty$ විට $y\to 1$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ C මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. C වක්‍රය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් සහ සමමිතික බව සැලකීමෙන් $y=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ මගින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේ දළ සටහනක් ද එම රූ

සටහනෙහිම අඳින්න. තවද C වක්‍රයෙනුත් $x = 2$, $y = 1$ රේඛා මඟිනුත් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x = 2$ රේඛාවෙනුත් $0 \leq x \leq 2$ ප්‍රාන්තරයේදී C, C' වක්‍ර මඟින් අන්තර්ගත වන S' පෙදෙස් වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න. (1993)

(32) a) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශය හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{(1+x^2)}{1+x^4} dx$ අනුකලනය අගයන්න.

b) n ධන නිඛිලයක් යැයි සිතමු. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = 0$ බව

පෙන්වා $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. තව ද

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2n+1)x}{\sin^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx\, dx}{\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වා $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. (1994)

(33) $y^2 = 3x(1-x)^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ සඳහා, ඉහත වක්‍රයේ ප්‍රථම වෘත්ත පාදයෙහි ඇති කොටස C යැයි සිතමු. x අක්ෂය $x = \frac{1}{3}$ රේඛාව සහ C මඟින් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න. (1994)

(34) i) $\int \frac{5x+3}{(x-1)(x+1)} dx$ සොයන්න.

ii) $x+1 = \frac{1}{t}$ ආදේශයෙන්, $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)(4x+3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left\{(4t-1)(1-2t)^{\frac{1}{2}}\right\}}$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta$ යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ අනුකලනයේ අගය $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^4\theta\, d\theta = \frac{8}{315}$ බව පෙන්වන්න. (1995)

(35) පිළිවෙළින් $y^2 = x$ සහ $y = 2 - x^2$ සමීකරණ මඟින් දෙනු ලබන $C_1$ හා $C_2$ වක්‍රයන්හි කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. $C_1$ හා $C_2$ වක්‍ර දෙක හා $y = 2$ සරල රේඛාව මඟින් සපර්යන්ත S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න. (1995)

(36) i) ආදේශ කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+1}}$ සොයන්න.

ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\int x^3 \tan^{-1} x\, dx$ ලබා ගන්න.

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^3 x\, dx$ අගයන්න. (1996)

(37) පිළිවෙළින් $y = x^3 + x^2 - x$ සහ $y = x^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන $C_1$ හා $C_2$ වක්‍රවල දළ සටහන්, එකම රූප සටහනක අඳින්න. $C_1$ හා $C_2$ වක්‍රවලින් අන්තර්ගත S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය ලබාගන්න. (1996)

(38) අ) f සහ g යනු $[-a, a]$ ප්‍රාන්තරය මත අනුකල්‍ය ශ්‍රිත දෙකක් යැයි සිතමු. $[-a, a]$ හි සියලුම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ සහ $g(-x) = -g(x)$ යැයි සිතමු. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ සහ $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$ බව පෙන්වන්න. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ අගයන්න.

ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්, $\int_{0}^{a} x^2 h'''(x)\,dx = a^2 h''(a) - 2ah'(a) + 2h(a) - 2h(0)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $h'(x) = \frac{dh}{dx}$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$ සහ $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}}\,dx$ අගයන්න. (1997)

(39) අ) $\frac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

ආ) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$ බව පෙන්වා ඒ නයින් $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ බව පෙන්වන්න. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1998)

(40) $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$ සොයන්න. (ඉඟිය : $t = \tan\frac{x}{2}$ යොදා බලන්න.) $\frac{\cos^2 x}{2+\sin x} = A + B\sin x + \frac{C}{2+\sin x}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණය කර ඒ නයින් $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\,dx$ අගයන්න.

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\ell n(2+\sin x)\,dx = \ell n\,2 + \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (1999)

(41) සුදුසු ආදේශකයක් උපයෝගී කර ගනිමින්

අ) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\left[x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right]}\,dx$ අගයන්න.

ආ) $I = \int_{0}^{\pi} e^{-2x}\cos x\,dx$ හා $J = \int_{0}^{\pi} e^{-2x}\sin x\,dx$ යයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය උපයෝගී කර ගනිමින් $I = 2J$ හා $J = 1 + e^{-2\pi} - 2I$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් I සහ J හි අගයන් ලබාගන්න.

ඇ) $\int \frac{x^2-5x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න. (2000)

(42) අ) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන් $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ dx අනුකලනය අගයන්න.

ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int_{2}^{4} x \ln x \, dx = a \ln b + c$ බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b සහ c යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වේ.

ඇ) $\int_{0}^{1} \frac{(7x-x^2)}{(2-x)(x^2+1)} dx$ සොයන්න. (2001)

(43) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන්, $\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int_{0}^{1} x \tan^{-1} x \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int_{1}^{2} \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)} dx$ සොයන්න. (2002)

(44) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන් $\int_{1}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_{0}^{1} x^2 e^{2x+3} dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$ සොයන්න. (2003)

(45) a) සුදුසු ආදේශකයක් යොදාගනිමින් $\int_{11}^{23} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ සොයන්න.

c) $\int \sin^4 2x \, dx$ සොයන්න. (2004)

(46) a) $\tan \frac{x}{2} = t$ ආදේශය යොදාගනිමින්, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_{0}^{1} 15x^3\sqrt{1+x^2} \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int \frac{x^2-10x+13}{(x-2)(x^2-5x+6)} dx$ සොයන්න. (2005)

(47) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන්, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x+\sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int e^{4x} \sin 3x \, dx$ සොයන්න.

c) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{dx}{x^3+1}$ සොයන්න. (2006)

(48) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින් $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ dx සොයන්න.

b) $25 \cos x + 15 \equiv A (3 \cos x + 4 \sin x + 5) + B (-3 \sin x + 4 \cos x) + C$ වන ආකාරයට A, B හා C සොයන්න. ඒ නයින්, $\int \frac{25 \cos x+15}{3 \cos x+4 \sin x+5}$ dx සොයන්න.

c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \frac{5}{6}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \frac{5.3}{6.4}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\, dx$ අගයන්න. (2007)

(49) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින්, $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ සොයන්න. මෙහි $a \neq 0$ වේ.

b) i) $\frac{d}{dx}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right] = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\int 2^x dx$ සොයන්න.

iii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} dx$ අගයන්න. (2008)

(50) a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $(k-1)I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C$ බව පෙන්වන්න; මෙහි C අභිමත නියතයකි. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$ සොයන්න; මෙහි $x > -1$ වේ.

b) f යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්ත්වික අගයන් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර, $J = \int_0^a f(x)\, dx$ වේ. මෙහි $a > 0$ වේ. $\int_0^a f(a-x)\, dx = J$ බව පෙන්වන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2k} x + \sin^{2k} x} dx$ අගයන්න ; මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. (2009)

(51) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින්, $\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}$ dx සොයන්න.

b) $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$ හා $J = \int e^{ax} \sin bx\, dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

i) $bI + aJ = e^{ax} \sin bx$,

ii) $aJ - bJ = e^{ax} \cos bx$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

c) $x^3 t+1 = 0$ ආදේශ උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \frac{1}{3} \ln\left[\frac{9}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න. (2010)

(52) $\frac{d}{dx} e^{2x} (A \sin 3x + B \cos 3x) = 13e^{2x} \sin 3x$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න. ඒ නයින්, $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$ සොයන්න. (2011)

(53) a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx$ අගයන්න.

b) t = tan x යැයි ගනිමු. $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}$ බව

පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin x + 5} dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

c) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු. $x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න. ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ සොයන්න

(2011)

(54) $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ වන අයුරින් වූ A හා B නියතයන් සොයන්න. එනයින් $\int \frac{2e^x+3e^{-x}}{2e^x+e^{-x}} dx$ සොයන්න. (2011)

(55) a) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

c) භින්න භාග යොදාගනිමින් $\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} dx$ සොයන්න. (2012)

(56) a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

b) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

c) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි ය. $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} dx$ සහ

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} dx$ යැයි ද ගනිමු. $aI + bj = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. bI − aJ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න. (2013)

(57) $\frac{d}{dx}\left\{x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right\} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$ සොයන්න. (2013)

(58) a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_{1}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ බව පෙන්වන්න.

c) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න. මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද, $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx$ යැයි ද ගනිමු. ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,dx$ බව පෙන්වන්න. $I$ සඳහා වූ ඉහත අනුකලන දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,dx$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් $I = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(59) $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න. (2014)

(60) a) $\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

b) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

c) $\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින් $\frac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයෙන් අනුකලනය කරන්න.

d) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(61) එකම රූප සටහනක $y = e^x$ හා $y = e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x අක්ෂයෙන් ද $-1 \le x \le 0$ පරාසය තුළ $y = e^x$ වක්‍රයෙන් හා $0 \le x \le 1$ පරාසය තුළ $y = e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ බව පෙන්වන්න. (2015)