වෘත්තය

(1) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා
$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි නම්, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය
$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$
$(f-f')x-(g-g')y+fg'-f'g=0$ රේඛාව එකක් මත පිහිටි බව පෙන්වන්න.
$x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $x^2+y^2-4x+4y+k=0$ වෘත්ත ස්පර්ශ කරන්නේ k හි කුමන අගයන් සඳහාදැයි සොයා ඒ එක් එක් අවස්ථාවේදී වෘත්ත ස්පර්ශ කරන්නේ බාහිරව ද නැතහොත් අභ්‍යන්තරව ද යන්න නිර්ණය කරන්න. (1975)

(2) λ හි සියළුම සංඛ්‍යාත්මක අගයන් සඳහා $(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+\lambda(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$ යන සමීකරණය $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ යන වෘත්තයන් හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.
මූලය හා $x^2+y^2-2x-6y+2=0$, $x^2+y^2-5x-8y+3=0$ යන වෘත්තයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න. එලෙසින් නිර්ණය කෙරෙන වෘත්තය දී ඇති වෘත්ත දෙකෙන් පළමුවැන්න ලම්බව ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න. (1976)

(3) p, m යනු පරාමිති නම්, $x^2+y^2-a^2+p(y-mx)=0$ යනු $x^2+y^2=a^2$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන වෘත්තයක සමීකරණය බව පෙන්වන්න.
S වෘත්තයක්, $3x^2+3y^2-5=0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන අතර p (1,2) හි සිට එම S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක එකක් අනෙකට ලම්බ වෙයි. S හි කේන්ද්‍රයේ පථය $3x^2+3y^2+6x+12y-5=0$ බව පෙන්වන්න.
මෙම වෘත්තයටත් දී තිබෙන වෘත්තයටත් ඇඳි පොදු ස්පර්ශක p හරහා යන බව අපෝහනය කරන්න. (1977)

(4) $g^2+f^2\geq c$ නම්, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ මගින් කේන්ද්‍රය $(-g, -f)$ වූ ද අරය $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ වූ ද වෘත්තයක් නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.
$x^2+y^2-20x+6y+84=0$
$x^2+y^2-24x-2y-80=0$ වෘත්තවලට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක හතර සොයන්න. (1978)

(5) $u_1\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$, $u_2\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$, $u_3\equiv a_3x+b_3y+c_3=0$ යනු සමාන්තර නොවන සරල රේඛා තුනකි. $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0$ වන පරිදි වූ එක විට ශුන්‍ය නොවන $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ නියත ඇත්තේ නම් සරල රේඛා තුන සංගාමී (ඒක ලක්ෂ්‍ය) බව සාධනය කරන්න.
$S_1\equiv x^2+y^2-2ax=0$ වෘත්තය මත (x, y) ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $[a(1+\cos\theta), a\sin\theta]$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු $0<\theta<2\pi$ වන පරිදි වූ පරාමිතියකි. $S_1=0$ මත කේන්ද්‍රය පිහිටි S විචල්‍ය වෘත්තයක් $S_2\equiv x^2+y^2-a^2=0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස කපයි. S හිත් $S_1=0$ හිත් පොදු ජ්‍යාය, S හිත් $S_2=0$ හිත් පොදු ජ්‍යාය, සමච්ඡේදනය කරන බව ඔප්පු කරන්න. (1979)

(6) $\boldsymbol{\lambda}$ යනු පරාමිතියක් වන $S + \boldsymbol{\lambda} S' = 0$ සමීකරණයෙන් $S = x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ හා $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ වෘත්තවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයක් නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.
$(15, -5)$ ලක්ෂ්‍ය හරහාත් $x^2 + y^2 - 10x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 30 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහාත් යන්නා වූ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
අ) මෙම වෘත්ත තුන අතුරින් දෙකක් ප්‍රලම්භ ලෙස ඡේදනය වන බවත්
ආ) වෘත්ත තුනෙහි පොදු ජ්‍යාය මේ වෘත්ත අතුරින් එකක විෂ්කම්භය බවත් පෙන්වන්න. (1980)

(7) $u_1 \equiv l_1x + m_1y + n_1 = 0, u_2 \equiv l_2x + m_2y + n_2 = 0, u_3 \equiv l_3x + m_3y + n_3 = 0$ යනු ප්‍රභින්න සමාන්තර නොවන සරල රේඛා තුනක සමීකරණයයි. $\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ වන පරිදි ශූන්‍ය නොවන $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ නියත තුනක් තිබෙයි නම් සරල රේඛා තුන සංගාමී බව සාධනය කරන්න.
$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්ත ප්‍රලම්බ වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවක් ප්‍රකාශ කරන්න.
$S = 0$ වෘත්තය $S' = 0$ ද $S'' \equiv x^2 + y^2 + 2g''x + 2f''y + c'' = 0$ යන වෘත්ත දෙකටම ප්‍රලම්බ නම් $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය $S' - S'' = 0$ සරල රේඛාව මත වන බව සාධනය කරන්න. ඒනයින්,
$S(1) \equiv x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$,
$S(2) \equiv x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$,
$S(3) \equiv x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$ වෘත්ත එක එකක් ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. (1981)

(8) $(f^2 - x_1^2 - 2x_1g - c)m^2 + 2(x_1 + g)(y_1 + f)m + (g^2 + y_1^2 - 2y_1 f - c) = 0$ නම්, $y - y_1 - m(x - x_1) = 0$ සරල රේඛාව $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් බව සාධනය කරන්න.
$S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 2 = 0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන්නා වූ වෘත්තයක සාධාරණ සමීකරණය $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ යනු පරාමිති ද $v = 4\lambda + 6\mu - 28$ ද වන $S \equiv x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + v = 0$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව සාධනය කරන්න.
$p(1, 3)$ හරහා යන සේ $S = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය එකක් අනෙකට ලම්බ නම්, $S = 0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයෙහි පථය $x^2 + y^2 + 10x + 18y + 46 = 0$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(9) $2gg' + 2ff' = c + c'$ නම් හා එසේ නම් පමණක් $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්ත ප්‍රලම්බ වන බව සාධනය කරන්න.
$x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 21 = 0$ වෘත්ත යුගල බැගින් ගෙන පොදු ජ්‍යායයන් තුනෙහි සමීකරණ සොයන්න. ඒවයේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයා පොදු ජ්‍යායයන් සංගමන වන බව පෙන්වන්න. දෙන ලද වෘත්ත තුන එක එකක් ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නාවූ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. එහි කේන්ද්‍රය ඉහත සංගමන ලක්ෂ්‍යය සමග සම්පාත වන බව සත්‍යාපනය කරන්න. (1983)

(10) $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ සහ $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක $\left(\frac{a_1r_2+a_2r_1}{r_2+r_1}, \frac{b_1r_2+b_2r_1}{r_2+r_1}\right)$ සහ $\left(\frac{a_1r_2-a_2r_1}{r_2-r_1}, \frac{b_1r_2-b_2r_1}{r_2-r_1}\right)$ ලක්ෂ්‍යය දෙකෙන් එකක් හෝ අනෙක හරහා යන බව සාධනය කරන්න.
$x^2+y^2-3x-4y+4=0$
$x^2+y^2-12x-16y+64=0$ යන වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න. (1984)

(11) $x^2+y^2-2ax-2ay-a^2<0$ සහ $x+y-2a<0$ අසමානතාව සමගාමීව සපුරාලන ලබන $x-y$ තලය තුළ වූ D පෙදෙස පෙන්නුම් කරන්න. මෙහි $a>0$ වේ. ඒනයින් ඉහත අවශ්‍යතාවට යටත්ව x^2+y^2 හි වැඩිතම සහ අඩුතම අගයන් සොයන්න. (1985)

(12) ප්‍රථම මූලධර්ම උපයෝගී කරගැනීමෙන් $x^2+y^2-10x-8y+31=0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයන්න. x අක්ෂය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට එකිනෙකට ලම්බ වන සේ පිහිටි ස්පර්ශක දෙකක් වෘත්තයට අඳිනු ලැබේ. එවැනි ලක්ෂ දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එක් එක් අවස්ථාවෙහි දී ස්පර්ශක වල සමීකරණ සොයන්න. (1986)

(13) පහත දක්වෙන අසමානතාවයන් සපුරාලන තලයේ R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.
$x^2+y^2-10x-12y+52\leq 0$ සහ $3x-4y+8\leq 0$, λ තාත්වික පරාමිතියක් වන $x+y=\lambda$ ආකාරයේ සරල රේඛා කුලයක සැලකිමෙන් R තුළ $x+y$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න. (1987)

(14) $15x^2+15y^2-48x+64y=0$ වෘත්තය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක සිට $5x^2+5y^2-24x+32y+75=0$ සහ $5x^2+5y^2-48x+64y+300=0$ වෘත්ත දෙකට අඳින ලද ස්පර්ශකවල දිග වෘත්ත දෙකෙහි අරයන්ගේ අනුපාතයට වන බව සාධනය කරන්න. (1988)

(15) $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තයේ $lx+my+n=0$ ඔස්සේ පිහිටන ජ්‍යාය බණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයේ දී සෘජුකෝණයක් ආපතනය කිරීමට අවශ්‍යතාව සොයන්න. ඒනයින්, $S=0$ වෘත්තයෙහි විචල්‍යය PQ ජ්‍යායක් මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී සෘජුකෝණයක් ආපතනය කරයි නම් එවිට මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට PQ ට අඳින ලද ලම්බකයේ අඩියෙහි පථය $x^2+y^2+5x+fy+c/2=0$ වෘත්තය බව පෙන්වන්න. (1989)

(16) $S_1\equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ සහ $S_2\equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.
$S_1=0$ සහ $S_2=0$ ප්‍රලම්බ සහ P සහ Q ලක්ෂ්‍යයවල දී ඡේදනය වේ යයි සිතමු. වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාව විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය P සහ Q හරහා යන බව පෙන්වා එහි සමීකරණය සොයන්න. (1989)

(17) $S\equiv x^2+y^2-2x-6y+1=0$
$S'\equiv 3x^2+3y^2-21x+2y+35=0$ වෘත්ත එකිනෙකට සම්පූර්ණයෙන්ම බාහිරව පිහිටා තිබෙන බව පෙන්වන්න. S ගෙන් ඉතාමත් දුරින් S' මත වූ P ලක්ෂ්‍යයෙහි බණ්ඩාංක සොයන්න.
P ගෙන් S ට අඳින ලද එක් ස්පර්ශයක සමීකරණය $x=4$ බව පෙන්වා අනෙකෙහි සමීකරණය සොයන්න. (1990)

(18) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි Q_1, Q_2 ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ ස්පර්ශක $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ හිදී හමු වේ. P_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි Q_1, Q_2 ස්පර්ශ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය, $xx_0 + yy_0 + g(x+x_0) + f(y+y_0) + c = 0$ බව පෙන්වන්න. $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$ වෘත්තවලට අනුබද්ධව $(1, -2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශ ජ්‍යායන් සම්පාත වන බව සාධනය කරන්න. තව ද, ඉහත දක් වූ වෘත්තවලට අනුබද්ධව ස්පර්ශ ජ්‍යායන් එකම වන පරිදි වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බව සොයා එහි බණ්ඩාංක සොයන්න. (1991)

(19) i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය සහ $l = px + qy + r = 0$ සරල රේඛාව A හා B හි දි එකිනෙක ඡේදනය කරයි. $\boldsymbol{\lambda}$ පරාමිතියක් විට $S + \boldsymbol{\lambda l} = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න. $S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0$ සහ $l = x - y + 2 = 0$ විට AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
S' වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයක් බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

ii) S වෘත්තය $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන අතර $S' : x^2 + y^2 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි විෂ්කම්භාභිමුඛ ලක්ෂ්‍යයුවල දී S' ඡේදනය කෙරේ. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය සහ S වෘත්තය සෘජුකෝණී ලෙස ඡේදනය වේ නම්, S හි සමීකරණය ලබාගන්න. (1992)

(20) a) අරය r සහිත S වෘත්තයක් x අක්ෂයත් y අක්ෂයත් ස්පර්ශ කරයි. S හි සමීකරණය සොයන්න. එවැනි වෘත්ත කොපමණ සංඛ්‍යාවක් ඇඳිය හැකි ද?
බණ්ඩාංක දෙකම ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $(2, 1)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණය ලබාගන්න.

b) $x^2 + y^2 = 25$ වෘත්තයේත් $y - x + 1 = 0$ රේඛාවෙත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා S, S' වෘත්ත දෙකත් අඳිනු ලැබ ඇත්තේ S සහ S' වෘත්ත දෙකම $x + y - 25 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන පරිදිය.
S සහ S' හි සමීකරණය සොයන්න.
S සහ S' හි පොදු ස්පර්ශක ඡේදනය නොවන බව ද පෙන්වන්න. (1993)

(21) $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ සහ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යය විෂ්කම්භය අන්ත වශයෙන් ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ බව පෙන්වන්න.
O මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයට විචල්‍ය ජ්‍යායන් අඳිනු ලැබේ. මෙහි a සහ r ධන වේ. i) $r \geq a$ සහ ii) $r < a$ අවස්ථාවන් හි දී වෙනස පැහැදිලිව සඳහන් කරමින් ඉහත කී ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ විට ඉහත පථය ගැන කුමක් කිව හැකි ද? (1994)

(22) $ax + by = 1$ සරල රේඛාව P_1, P_2 ලක්ෂ්‍යවල දී $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය හමු වේ. O යනු බණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයයි. OP_1 හිත් OP_2 හිත් සමීකරණ පිළිවෙලින් $y = m_1x$ සහ $y = m_2x$ මඟින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.
මෙහි m_1, m_2 යනු $(i + 2fb + cb^2)m^2 + (2gb + 2fa + 2abc)m + ca^2 + 2ag + 1 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.
මේ වෘත්තය, මූල ලක්ෂ්‍යය O හරහා යයි නම්,

i) O ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයේ C කේන්ද්‍රයට යා කෙරෙන රේඛාව $y = \frac{a(m_1+m_2) - b(1-m_1m_2)}{b(m_1+m_2) + a(1-m_1m_2)}x$ බව පෙන්වන්න.

(18) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි Q_1, Q_2 ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ ස්පර්ශක $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ හීදි හමු වේ. P_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි Q_1, Q_2 ස්පර්ශ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය , $xx_0 + yy_0 + g(x+x_0) + f(y+y_0) + c = 0$ බව පෙන්වන්න. $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$ වෘත්තවලට අනුබද්ධව $(1, -2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශ ජ්‍යායන් සම්පාත වන බව සාධනය කරන්න. තව ද, ඉහත දක් වූ වෘත්තවලට අනුබද්ධව ස්පර්ශ ජ්‍යායන් එකම වන පරිදි වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බව සොයා එහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (1991)

(19) i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය සහ $l = px + qy + r = 0$ සරල රේඛාව A හා B හි දි එකිනෙක ඡේදනය කරයි. λ පරාමිතියක් විට $S + \lambda l = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න. $S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0$ සහ $l = x - y + 2 = 0$ විට AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයක් බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

ii) S වෘත්තය $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන අතර $S' : x^2 + y^2 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි විෂ්කම්භාභිමුඛ ලක්ෂ්‍යයුවල දී S' ඡේදනය කෙරේ. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය සහ S වෘත්තය සෘජුකෝණී ලෙස ඡේදනය වේ නම්, S හි සමීකරණය ලබාගන්න. (1992)

(20) a) අරය r සහිත S වෘත්තයක් x අක්ෂයත් y අක්ෂයත් ස්පර්ශ කරයි. S හි සමීකරණය සොයන්න. එවැනි වෘත්ත කොපමණ සංඛ්‍යාවක් ඇඳිය හැකි ද? ඛණ්ඩාංක දෙකම ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $(2, 1)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණය ලබාගන්න.

b) $x^2 + y^2 = 25$ වෘත්තයේත් $y - x + 1 = 0$ රේඛාවෙත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා S, S' වෘත්ත දෙකත් අඳිනු ලැබ ඇත්තේ S සහ S' වෘත්ත දෙකම $x + y - 25 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන පරිදිය.

S සහ S' හි සමීකරණය සොයන්න.

S සහ S' හි පොදු ස්පර්ශක ඡේදනය නොවන බව ද පෙන්වන්න. (1993)

(21) $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ සහ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යය විෂ්කම්භය අන්ත වශයෙන් ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ බව පෙන්වන්න.

O මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයට විචල්‍ය ජ්‍යායන් අඳිනු ලැබේ. මෙහි a සහ r ධන වේ. i) $r \geq a$ සහ ii) $r < a$ අවස්ථාවන් හි දී වෙනස පැහැදිලිව සඳහන් කරමින් ඉහත කී ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ විට ඉහත පථය ගැන කුමක් කිව හැකි ද? (1994)

(22) $ax + by = 1$ සරල රේඛාව P_1 , P_2 ලක්ෂ්‍යවල දී $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය හමු වේ. O යනු ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයයි. OP_1 හිත් OP_2 හිත් සමීකරණ පිළිවෙලින් $y = m_1x$ සහ $y = m_2x$ මඟින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

මෙහි m_1, m_2 යනු $(i + 2fb + cb^2)m^2 + (2gb + 2fa + 2abc)m + ca^2 + 2ag + 1 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

මෙ වෘත්තය, මූල ලක්ෂ්‍යය O හරහා යයි නම්,

i) O ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයේ C කේන්ද්‍රයට යා කෙරෙන රේඛාව

$y = \frac{a(m_1+m_2)-b(1-m_1m_2)}{b(m_1+m_2)+a(1-m_1m_2)}x$ බව පෙන්වන්න.

ii) f, g, a, b ඇසුරෙන් $(y - m_1x)(y - m_2x)$ අගයන්න. ඒ නයින්, OP_1 හෝ OP_2 යන කවර රේඛාවක් මත පිහිටි ඕනෑම P(x, y) ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2fb)y^2 + (2gb + 2fa)xy + (2ag + 1)x^2 = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.(1995)

(23) $ax + by = 1$ සරල රේඛාව $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය කරයි. ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී A B සෘජුකෝණාස්‍රයක් ආපාතනය කරයි නම්, $c(a^2 + b^2) + 2(ag + bf + c) = 0$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ වෘත්තයේ PQ විචල්‍ය ජ්‍යායක් මූල ලක්ෂ්‍යයේ දී සෘජුකෝණාස්‍රයක් ආපාතනය කරයි ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිත කර හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ PQ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ වෘත්තය බව පෙන්වන්න. (1996)

(24) S = 0 වෘත්තයක් ද u = 0 සරල රේඛාවක් ද වේ. **λ** යනු විචල්‍ය පරිමිතියක් විට $S + \lambda u = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න.
$x^2 + y^2 = 4$ වෘත්තයේත් $x + y = 1$ රේඛාවේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන **Γ** විචල්‍ය වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ වෘත්තය P සහ Q හි දී ඡේදනය කරයි. PQ රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $2x^2 + 2y^2 - 5x + y + 3 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1997)

(25) $A \equiv (1,2)$ සහ $B \equiv (3,2)$ ලෙස ගනිමු. $P \equiv (x, y)$ යනුවෙන් ABP කෝණය නියතයක් වන පරිදි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.
i) $\angle APB = 90^0$ නම් P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
ii) $\angle APB = 135^0$ නම් P ලක්ෂ්‍යය එක්කෝ $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ වෘත්තය මත නැත්නම් $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? මෙම වෘත්ත දෙක සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. (1998)

(26) $P(\cos\theta, \sin\theta)$ යනු $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි. Q යනු P හරහා වූ විෂ්කම්භයේ අනෙක් අන්තයයි. A සහ B යනු පිළිවෙලින් (1, 0) සහ (0, 1) ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍යය වේ. AP සහ BQ රේඛා U හි දී ඡේදනය වේ නම් U හි ඛණ්ඩාංක $(x-1)\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2} = 0$ සහ
$(1 + x - y)\cos\frac{\theta}{2} + (x + y - 1)\sin\frac{\theta}{2} = 0$ සමීකරණ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. U ලක්ෂ්‍යය S අචල වෘත්තයක් මත පිහිටන බව අපෝහනය කර එහි සමීකරණය ලබාගන්න. තව ද AQ සහ BP හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ද S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1999)

(27) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම් එවිට $2g_1 g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$ බව පෙන්වන්න. x – අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටි S වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ මගින් දෙනු ලබන S' වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරනු ලබන අතර $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ මගින් දෙනු ලබන S'' වෘත්තය ස්පර්ශ කරනු ලැබේ. එකක් S'' වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරන ලෙස ද අනෙක S'' වෘත්තය අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන ලෙස ද වූ එවැනි වෘත්ත දෙකක් S ට ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. (2000)

(28) (x_0, y_0) බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $xx_0 + yy_0 + g(x + x^0) + f(y + y_0) + c = 0$ බව පෙන්වන්න. දෙන ලද වෘත්තයක සහ දෙන ලද සරල රේඛාවක සමීකරණ පිළිවෙලින් $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ සහ $4x + 3y - 5 = 0$ වේ. රේඛාව වෘත්තය නොකපන බව පෙන්වන්න. විචල්‍යය සරල රේඛාවක් දී ඇති වෘත්තය P සහ Q ප්‍රභින්න ලක්ෂය දෙකක දී ඡේදනය කරන අතර P සහ Q හි දී වෘත්තයට වූ ස්පර්ශක දී ඇති සරල රේඛාව මත දී හමු වේ. මෙම විචල්‍යය රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වා මෙම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (2001)

(29) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත ස්පර්ශ වීම සඳහා අවශ්‍යතාවක් සොයන්න. ඒවා ස්පර්ශ වේ නම්, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$ සහ $(f_1 - f_2)x - (g_1 - g_2)y + f_1g_2 - f_2g_1 = 0$ රේඛා එක එකක් මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ සහ $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ වෘත්ත එකිනෙක බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වා වෘත්ත දෙකෙහි A ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. P යනු, P හි සිට ප්‍රථම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග P හි සිට දෙවැනි වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් k (නියතයක්) වාරයක් වන සේ වූ ලක්ෂ්‍යයකි. $k^2 \neq 1$ නම් P හි පථය A හරහා වූ වෘත්තයක් බව සාධනය කර k ඇසුරෙන් එහි සමීකරණය සොයන්න. (2002)

(30) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්භ ව ඡේදනය වේ නම්, $2gg' + 2ff' = c + c'$ බව පෙන්වන්න.
P සහ Q යනු, පිළිවෙලින් $(-a, 0)$ සහ $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ඛණ්ඩාංක සහිත $S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය ගනිමු. PQ = QR වන සේ PQ ජ්‍යාය R ලක්ෂ්‍යයට විස්තීරණය කර ඇත. R හි ඛණ්ඩාංක සොයා θ විචලනය වන විට S' වෘත්තයක් මත R පිහිටන බව පෙන්වන්න. S'හි සමීකරණය ලබාගන්න.
S'' තෙවන වෘත්තයක්, y අක්ෂය ස්පර්ශ කරන අතර S හා S' වෘත්ත දෙකම ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරනු ලැබේ. එවැනි S'' වෘත්ත දෙකක් පවතින බව පෙන්වා ඒවායේ සමීකරණ ලබාගන්න. (2003)

(31) $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0$ යැයි ගනිමු.
$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ අභ්‍යන්තර ලෙස ස්පර්ශ වන බව පෙන්වා ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය වන P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. P ලක්ෂ්‍යය හරහා අඳිනු ලබන සරල රේඛාවක් පිළිවෙලින් Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ නැවත කපයි. QR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 5 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (2004)

(32) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ හා $x^2 + y^2 - 4r^2 = 0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත දෙක එකිනෙකට බාහිර ලෙස කොහෙත්ම ස්පර්ශ නොවන නමුත් $g^2 + f^2 = r^2$ නම් අභ්‍යන්තර ලෙස එකිනෙකට ස්පර්ශ වන බව පෙන්වන්න.
පසුව සඳහන් කළ අවස්ථාවේ දී ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. මූල ලක්ෂ්‍යයත් $0 < a < 1$ වන $(a, 0)$ ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන්නා වූ ද සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වන වෘත්ත ස්පර්ශ කරන්නා වූ වෘත්ත දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. මෙම ලක්ෂ්‍යය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය ද සොයන්න. (2005)

(33) (x_0, y_0) බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යයේ සමීකරණය ලබාගන්න. (1, 1) (−1, 0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයක් $S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ වෘත්තය P සහ Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරයි. S = 0 වෘත්තයට P සහ Q හි දී ඇති ස්පර්ශක R හිදී හමු වේ. R ලක්ෂ්‍යය $(2a^2 - 3)x + (a^2 - 1)y - a^2 = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (2006)

(34) වෘත්ත දෙකකට ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය එක එකක දී අඳින ලද ස්පර්ශක දෙක සෘජුකෝණික වන විට එම වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ යැයි කියනු ලැබේ. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.
$x^2 + y^2 + 4x + 2\lambda y - 6 = 0$ ....(*)
සමීකරණය $(-2 + \sqrt{10}, 0)$ හා $(-2 - \sqrt{10}, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්ත පද්ධතියක් නිරූපණය කරන බව සාධනය කරන්න. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.
S = 0 යනු (*) මගින් නිරූපණය කෙරෙන පද්ධතියට අයත් වෘත්තයක් වේ. S = 0 ට ප්‍රලම්බ එම පද්ධතියටම අයත් අනන්‍ය S' = 0 වෘත්තයක් පවතින බව පෙන්වන්න.
$S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 4y - 6 = 0$ වන විට S' = 0 සොයන්න.
S = 0 හා S' = 0 දෙකටම ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සාධාරණ සමීකරණයත් සොයන්න.(2007)

(35) a) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ හා $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ යැයි ගනිමු. S = 0 යනු අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන විචල්‍ය වෘත්තයක් ද S' = 0 යනු අචල වෘත්තයක් ද වේ. S = 0 වෘත්තය S' = 0 වෘත්තය විෂ්කම්භයක ප්‍රතිවිරුද්ධ අන්තවල දී කපයි. S = 0 හි කේන්ද්‍රය අචල සරල රේඛාවක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

b) A සහ B යනු පිළිවෙලින් (x_1, y_1) සහ (x_2, y_2) යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක වේ. AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.
CD යනු AB ට ලම්බ විෂ්කම්භය වේ. C හා D හි ඛණ්ඩාංක $\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \lambda, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \mu\right]$ සහ $\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \lambda, (y_1 + y_2) - \mu\right]$ ආකාරය ගන්නා බව පෙන්වන්න. මෙහි λ සහ μ නිර්ණය කළ යුතු වේ. (2008)

(36) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ සමීකරණ මගින් ඡේදනය නොවන වෘත්ත දෙකක් නිරූපණය කෙරෙයි. වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර O_1 සහ O_2 යැයි ගනිමු. O_1 සහ O_2 අතර පිහිටි T ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්ත දෙකට පොදු ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකිය.
T ලක්ෂ්‍යය හඳුනා ගෙන එහි ඛණ්ඩාංක O_1 සහ O_2 ඛණ්ඩාංක සහ වෘත්ත දෙකේ අරයන් ඇසුරෙන් සොයන්න.
වෘත්ත දෙකට දෙවන ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි O_1O_2 විස්තෘත රේඛාව මත පිහිටි T' ලක්ෂ්‍යය ද හඳුනා ගෙන T' හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 86 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 74 = 0$ වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි පොදු ස්පර්ශක හතරේ සමීකරණ සොයන්න. (2009)

(37) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තර ලෙස හෝ බාහිර ලෙස හෝ එකිනෙක ස්පර්ශ වීම සඳහා අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න.
$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යනු වෘත්තයක් යැයි ද $P_1(x_1, y_1)$ යනු S = 0 වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. P_1 ලක්ෂ්‍යයේ සිට S = 0 වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිර ලෙස එකිනෙක ස්පර්ශ වන බව සාධනය කරන්න. $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

P යනු P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_1 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක දිග k වරක් P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_2 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක දිගට සමාන වන ආකාරයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.
P ලක්ෂ්‍යයේ පථය,
i) $k = 1$ නම්, $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට ලම්බව A ලක්ෂ්‍ය හරහා යන සරල රේඛාවක් බව,
ii) $k \neq 1$ නම්, A ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයක් බව සාධනය කරන්න. (2010)

(38) $x + y + 1 = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද කේන්ද්‍රය y අක්ෂය මත පිහිටියා වූ ද එක එකක අරය $\sqrt{2}$ වූ ද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. (2011)

(39) P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2 + y^2 - 12x = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් දෙගුණයකි. P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (2011)

(40) $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්තය, $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය $S = 0$ වෘත්තයෙහි විෂ්කම්භයක කෙළවරවල දී ඡේදනය කරයි නම්, $2g^2 + 2f^2 - c = 2gg' + 2ff' - c'$ බව පෙන්වන්න.
විචල්‍ය වෘත්තයක් $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ වෘත්ත එක එකක විෂ්කම්භයක කෙළවරවල දී ඒවා ඡේදනය කරයි. විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + 2y + 2 = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (2011)

(41) (2, 0) හා (0, 2) ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි. මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය λ ඇසුරින් සොයන්න. (2012)

(42) AB විෂ්කම්භය සහිත S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙහි A = (1, 3) හා B = (2, 4) වේ. තව ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස කපන (−1, 2) කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. (2012)

(43) g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
$y + 5 = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් (1, 1) ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වෘත්ත දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණය සොයන්න. (2012)

(44) අරය 1 ක් වූ ද කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ සරල රේඛාව මතවූ C වෘත්තයක් $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරයි. C හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (2013)

(45) $x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 1 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක හා අරය සොයා xy තලය මත S වෘත්තයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
P යනු S වෘත්තය මත O මූලයෙහි සිට ඈතින්ම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වා වෘත්තයට P ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ ස්පර්ශක රේඛාව වන l හි සමීකරණය $x + y = 2 + \sqrt{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
l රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් S" වෘත්තයක් S වෘත්තය P ගෙන් ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යයක දී බාහිරව ස්පර්ශ කරයි. (h, k) යනු S" වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක යැයි ගනිමු. l රේඛාව අනුබද්ධයෙන් O හි හා S" කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සලකා බැලීමෙන් $h + k < 2 + \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.
S' හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}\,(h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ සමීකරණය සපුරාලන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න. (2013)

(46) (0, 3) ලක්ෂ්‍යයේ දී y − අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද, $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන්නාවූ ද, වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න. (2014)

(47) l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x + y = 5$ හා $x + 2y = 4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left[\frac{3}{4}\right]$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න. l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A යැයි ද, $R = \{(x, y) : x + 2y \leq 4$ හා $2x + y \geq 5\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy − තලයෙහි අඳුරු කරන්න.
l_1 හා l_2 රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අතරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$ බව පෙන්වන්න.
ස්පර්ශ ජ්‍යාය සඳහා සුපුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $x - y = 10$ බව පෙන්වන්න.
A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමග S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. (2014)

(48) A = (1, 2) සහ B = (3, 2) ලෙස ගනිමු. A = (x, y) යනුවෙන් APB කෝණය නියතයක් වන පරිදි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.
i) $\angle APB = 90°$ නම් P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
ii) $\angle APB = 135°$ නම් P ලක්ෂ්‍යය එක්කෝ $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ වෘත්තය මත නැත්නම් $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? මෙම වෘත්ත දෙක සෘජුකෝණීව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. (1998)

(49) වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2 + y^2 + 2gx\ 2fy + c = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg' + 2ff' = c + c'$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.
O මූලයෙහි පොදු කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය R(>r) වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.
S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙකම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.
C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකටම B ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද පොදු ස්පර්ශකයට x අක්ෂය P හිදී ද, y අක්ෂය Q හිදී ද, හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x + 3y = 40$ බවත්, PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණයේ $3(x^2 + y^2) - 30x - 40y = 0$ බවත් පෙන්වන්න. (2015)

(50) O මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ද $y = 1$ රේඛාවේත් $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ වෘත්තයේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක ඔස්සේ ද යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න. (2015)