සීමාව හා අවකලනය

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම් $\sin 1 < \sin\theta < \tan\theta$ බව ජ්‍යාමිතික ලෙස සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\theta \to +0$ විට $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ බව පෙන්වන්න. $\theta \to -0$ විට ද $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ බව අපෝහනය කරන්න. ප්‍රමුල ධර්මවලින් $\frac{d}{dx}(\sin x)$ සොයන්න. ඒ නයින්, පිළිවෙලින් $\frac{d}{dx}(\cos x)$ හා $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$ සෙවීම සඳහා $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$ හා $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}$ සූත්‍ර භාවිත කරන්න. $y = \sin(a \sin^{-1} x)$ නම් $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x\,dy}{dx} + a^2y = 0$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි a නියතයකි. (1975)

(2) i) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ බව ඔප්පු කරන්න. ඒ නයින් $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ බව ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් සාධනය කරන්න.

ii) උපකල්පනය කරනු ලබන යම් මූලික සීමාවක් වෙයි නම් එය (සාධනය නොමැතිව) සඳහන් කරමින් $\frac{d}{dx}(\sin x)$ = කොස් x බව ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් සාධනය කරන්න.
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $f_1(x)$ ද $f_2(x)$ ද x හි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිත වන විට $f(x) = f_1(x)\ f_2(x)$ වෙයි නම් $\frac{d}{dx}\{f_1(x)\}, \frac{d}{dx}\{f_2(x)\}$සහ $f_1(x)$ සහ $f_2(x)$ ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$ සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගන්න. m ද ධන නිඛිලයක් වන විට $y = \sin^{m+1}x \cos^{n-1}x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = (m+n)\sin^m x \cos^n x - (n-1)\sin^m x \cos^{n-2} x$ බව සාධනය කරන්න.(1976)

(3) i) $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ නම්, $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) x, y යනු $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ යන සම්බන්ධවලින් සැබැඳුණු විචල්‍ය නම්, t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. (1978)

(4) n යනු ධන නිඛිලයක් විට x විෂයයෙන් x^n හි ව්‍යුත්පන්නය (= අවකලන සංගුණකය) ප්‍රමූලධර්මවලින් ලබාගන්න. $y =$ ලඝු x^n විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. $y = n$ ලඝු x ද $e^y = x^n$ ද යනුවෙන් අර්ථ දක්වෙන තුල්‍ය ශ්‍රිත ද එම ව්‍යුත්පන්නයම දෙන බව පෙන්වන්න.(1979)

(5) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ බව උපකල්පනය කිරීමෙන් $\frac{d}{dx}(\sin x)$ ද $\frac{d}{dx}(\cos x)$ ද සොයන්න. a ද, b ද නියත විට,

i) $\sin(\cos x)$ ii) $\sin^{1}(\cos x)\ 0 < x < \pi$

iii) $\cos ax \sin\frac{b}{x}$ iv) $\frac{a+\sin x}{b+\cos x}$ යන මේවායෙහි

x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්න (ඒවා පවතින විට) සොයන්න. (1979 අතුරු)

(6) u, v යනු x හි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිත දෙකක් නම්, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ බව සාධනය කරන්න. $y = \sin^{-1} x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ බව සාධනය කරන්න.

i) m නියතයක් වූ y = සයින් (m සයින්$^{-1}$ x) නම්, $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = m\cos(m\sin^{-1} x)$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) $1 < x < \frac{3}{2}$ වන අතර $u = 2\sin^{-1}\sqrt{x-1}$ ද $v = \sin^{-1} 2\sqrt{(2-x)(x-1)}$ ද නම්, $\frac{d}{dx}(uv) = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}(u+v)$ බව පෙන්වන්න. (1980)

(7) i) ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒනයින්, $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ බව පෙන්වන්න. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x$ සොයන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය ලබාගැනීමේ දී ඔබ විසින් භාවිතා කරන්නට යෙදුණු සීමා සහ ව්‍යුත්පන්න පිළිබඳව ප්‍රමේය හෝ සූත්‍ර හෝ කවරේ දැයි සාධන රහිතව ප්‍රකාශ කරන්න.

අ) $\cot(\sin x \cot^{-1} x)$

ආ) $\cot^{-1}$(ලඝු cos x), $0 < x < \frac{\pi}{2}$, x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

ii) $x > a > 0$ විට y = ලඝු $(x+\sqrt{x^2-a^2})$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $(x^2-a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1981)

(8) i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ බව ජ්‍යාමිතික ලෙස සාධනය කරන්න. මේ නයින්, ධන අගය ඔස්සේ $\theta \to 0$ විට $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ බව පෙන්වන්න. a නියතයක් විට $\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)$ බව ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $y=\sin^{-1}\frac{x}{b}, \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, -b < x < b$ නම් $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

α) $(x^2+1)^{1/2}\ \sin^3 2x$ ද, β) $\sin^2(a\sin^{-1}\frac{x}{b})$, $-b < x < b$ ද

x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

ii) $x - a > 0$ විට $y = \{\log(x-a)\}^2$ නම්, $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. $(x-a)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x-a)\frac{dy}{dx} = 2$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(9) $y = \sin^{-1}x$ නම්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ බව සාධනය කරන්න. මෙ නයින්, $x = 0$ ලක්ෂයේ දී $n = 2, 3, 4, 5$ සඳහා $\frac{d^ny}{dx^n}$ හි අගයයන් සොයන්න. (1982)

(10) i) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ බව ප්‍රමූල ධර්මවලින් සාධනය කර $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඇ) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ ආ) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|$

x විෂයයෙන් අවකලනය කර ලැබෙන ප්‍රතිඵල සුලු කරන්න.

ii) m නියතයක් හා $y = e^{m\tan^{-1}x^2}$ නම්, $(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2-m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(11) $y = \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x)^2$ නම් එවිට $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$, x වලින් ස්වායත්ත බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $n = 2, 3, 4$ සඳහා $x = 0$ ලක්ෂයේ දී $\frac{d^ny}{dx^n}$ හි අගයයන් සොයන්න. (1983)

(12) i) f සහ g යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$ බව සාධනය කරන්න. x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

ඇ) $e^{x^2}\sin 2x$ ආ) $\sqrt{x}\sin^{-1}(2x-1)$ ඉ) $\left(\frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}\right)\log|\sec x + \tan x|$

ii) $(\alpha+\beta x)e^{y/x} = x$ නම්, $x^3 \times \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි α සහ β නියත වේ. (1984)

(13) ඇ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin x < x < \tan x$ බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රම මඟින් සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, ධන අගයන් හරහා $x \to 0$ විට $\frac{\sin x}{x} \to 1$ බව පෙන්වන්න. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$ සොයන්න.

ආ) x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

i) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ii) $\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}, x \neq 1$

ඉ) $y_n = \sec x\tan^n x$ නම්, $\frac{dy_n}{dx} = ny_{n-1} + (n+1)y_{n+1}$ බව පෙන්වන්න. n සඳහා සුදුසු අගයක් දෙමින් $\int \sec x\tan x\,dx$ සොයන්න. (1985)

(14) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin x < x < \tan x$ බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රම මඟින් සාධනය කරන්න. x ධන අගයන් හරහා ශූන්‍යය කරා එළැඹෙන විට $\frac{\sin x}{x}$ හි සීමාව අපෝහනය කරන්න.

ඇ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\tan 7x}{6x}$ ආ) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\cos x}{\sin x}$

$y_n = \sin^n x$ යයි ගනිමු. මෙහි n ඕනෑම පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $\frac{d^2y_n}{dx^2} = n(n-1)y_{n-2} - n^2y_n$ බව පෙන්වන්න. $I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} y_n dx$ යැයි ලියමු. $(n > 1)$

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} \frac{d^2y_n}{dx^2} dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ බව පෙන්වන්න. I_4 හි අගය අපෝහනය කරන්න. (1986)

(15) i) n ධන නිඛිලයක් වන විට $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම $n(\neq 0)$ නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ප්‍රමූලධර්ම වලින් $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ සොයන්න. $\{\log|\tan^{-1} x|\}^2$ යන්න x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

iii) $y = x \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ යයි ගනිමු. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ බව සාධනය කරන්න. (1987)

(16) i) අ) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin 3x}{x - \sin 3x}$ ආ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x) \sec 2x$ අගයන්න.

ii) මතු දැක්වෙන දෑ x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

අ) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}}$ මෙහි α යනු නියතයකි.

ආ) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$ ඉ) $\sqrt{1 + \sin^2(\sqrt{x})}$

iii) $y = e^x \sin 2x$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\frac{dy}{dx} + \mu y = 0$ වන අයුරින් λ සහ μ නියතයන් සොයන්න. (1988)

(17) i) $\frac{\sin x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් සොයන්න.

ii) පහත දැක්වෙන දෑය x හි විෂයයෙන් අවකලනය කර ඔබේ ප්‍රතිඵලය සරලම ආකාරයෙන් දක්වන්න. $\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{b\cos x + a}\right)$; මෙහි a සහ b යනු නියත වේ.

iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර $x = \tan\theta$ වේ. $\frac{dy}{d\theta}$ සහ $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ ඇසුරෙන් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $(1 + x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$ නම්, $\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1989)

(18) i) ප්‍රමූලධර්ම වලින් $\frac{\tan x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

ii) a සහ b යනු නියතව වන $\tan^{-1}\left(\frac{a - b\sin x}{b + a\sin x}\right)$, x විෂයයෙන් අවකලනය කර පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දක්වන්න.

iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් ද, $x = \sin\theta$ ද වේ. $\frac{dy}{d\theta}$ සහ $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ මගින් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0$ නම්, $\frac{d^2y}{d\theta^2} + ky = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1990)

(19) i) u සහ v යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, u,v සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(uv)$ සඳහා සූත්‍රයක් ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබාගන්න.

ii) $y = \frac{u}{v}$ නම්, ලඝු ගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන් $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ බව පෙන්වන්න.

iii) $y = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{v_1 v_2 \cdots v_n}$ නම්, $\frac{dy}{dx} = y\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} - \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි u, v ආදිය x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වේ.

iv) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ යන්න $\tan^{-1}x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න. (1991)

(20) i) f යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද $f(x) > 0$ ද නම්, x විෂයයෙන් $\sqrt{f(x)}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබාගන්න.

ii) x විෂයයෙන් $\tan^{-1}x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $x = \tan\theta$ යැයි ගැනීමෙන් හා x විෂයෙන් $\tan^{-1}x$ හි ව්‍යුත්පන්නය උපයෝගී කර ගනිමින් x විෂයයෙන්, $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ සහ $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නයෙන් සොයන්න. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ විෂයයෙන් $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

iii) $y = \{\sin^{-1}x\}^2$ නම්, $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ බව අපෝහනය කරන්න. (1992)

(21) a) $-1 < x < 1$ විට x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ සහ

ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{4+x^4}}\right)$

b) උත්තර දෙකම සමාන වන්නේ මන්දැයි පහදන්න. ප්‍රමූලධර්ම වලින් x විෂයයෙන් $\sec x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සහ $y = (\sec x + \tan x)^{1/2}$ නම්,

i) $2\frac{dy}{dx} = y\sec x$ සහ ii) $2\frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}$ බව සාධනය කරන්න. (1993)

(22) a) $x \neq 0$ විට ප්‍රමූලධර්ම මඟින් $\frac{d}{dx}(\cos\frac{1}{x})$ ලබාගන්න.

b) $y = e^{-x}\sin(x\sqrt{3})$ නම්, $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ λy ආකාරයෙන් $\frac{d^3y}{dx^3}$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

c) $x = \sin\theta$ සහ $y = \sin n\theta$ යැයි ගනිමු. මෙහි n නියතයක් ද $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ද වේ. n සහ θ ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ලබාගෙන එනයින් $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$ බව පෙන්වන්න. (1994)

(23) i) ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීමෙන් පටන් ගෙන $y = -\cot x - x$ ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

ii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර ඒවා $x\frac{dy}{dx} = 3(y^2x^6 - y + 4)$ යන්නෙන් සම්බන්ධ වී ඇත.

a) $y = \frac{2}{x^3}\tan(2x^3 - \alpha)$ යන්න ඉහත සම්බන්ධය සපුරාලන බව සෘජු ආදේශයෙන් පෙන්වන්න. මෙහි α නියතයකි.

b) එම සම්බන්ධය $\frac{dy}{dx} = 3x^2(4 + v^2)$ යන්නට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $v = x^3y$ වේ.

iii) $x = 2t^3 + 1$ සහ $y = 4t^4 - 1$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(1995)

(24) i) a) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - x}{\tan 3x - 2x}$ සොයන්න.

ii) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ බව ප්‍රමූලධර්ම මඟින් සාධනය කර, $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) a) $y = \sin(\sin x)$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න.

b) k යනු නියතයක් ද $\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0$ ද විට $x = k(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = k(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ නම්, θ හි ශ්‍රිත ලෙස $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයන්න.

(1996)

(25) අ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ සොයන්න.

ආ) සුදුසු ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමෙන් $0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1997)

(26) අ) ප්‍රමූලධර්ම මඟින් $\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x)$ බව සාධනය කරන්න.

ආ) $x > 0$ සඳහා $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ නම්, $2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$ බව පෙන්වන්න.

(1997)

(27) අ) f යනු, ℝ හි එකක් x හි දී $(f(x))^3 - x(f(x))^2 - x^2 f(x) - 2x^3 - 7x^4 + 7x^5 = 0$ අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන ℝ මත අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු. ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $f(0) = 2$ බව පෙන්වන්න. $f(1)$ අගයන්න.

ආ) $x > 1$ සඳහා $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ සොයන්න.

ඇ) $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1}x - 9$ නම්, (0, 3) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ද $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. (1998)

(28) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$ ලෙස ගනිමු.

i) x හි කිසිම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $-7-4\sqrt{3}$ සහ $-7+4\sqrt{3}$ අතර f(x) නොපිහිටින බව පෙන්වන්න.

ii) $A + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-3}$ ආකාරයෙන් f(x) ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B හා C නියත වේ. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ f හි උපරිම සහ අවම සොයන්න.

iii) f හි සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන් මුඛවල සමීකරණ සොයන්න.

iv) f හි ප්‍රස්තාරයෙහි කටු සටහනක් අඳින්න. (1998)

(29) අ) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ නම්, $x = 1$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

ආ) $y = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$ නම්, $(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න. (1999)

(30) අ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2\sin x)}{1-\cos 2x}$ අගයන්න.

ආ) $y = e^{k\sin^{-1}x}$ නම්, $\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = ky$ බව පෙන්වන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. $x = \frac{1}{2}$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. (2000)

(31) අ) $x = t - \sin t$ හා $y = 1 - \cos t$ නම්, $t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න. (2001)

(32) $y = e^{4x}\sin 3x$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ සහ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2002)

(33) $y = e^{\cos x}$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ සහ $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2003)

(34) $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ යැයි ගනිමු. $\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$ බව පෙන්වන්න. $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ වන අයුරින් p හා q සංඛ්‍යා දෙක නිර්ණය කරන්න. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2004)

(35) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ නම්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ හා $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2005)

(36) $y = (1+4x^2)\tan^{-1}(2x)$ ලෙස ගනිමු.

i) $(1+4x^2)\frac{dy}{dx} - 8xy = 2(1+4x^2)$ සහ

ii) $(1+4x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 8y = 16x$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2006)

(37) i) ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^r}{dx^r}(xe^x) = (x+r)e^x$ බව පෙන්වන්න.

ii) $y = x^2e^x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = 2xe^x + y$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{d^ry}{dx^r} - \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = 2(x+r-1)e^x$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒනයින්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^ny}{dx^n} = n(2x+n-1)e^x + y$ බව පෙන්වන්න. (2007)

(38) a) ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \tan x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

b) y යනු u හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් සහ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ විට $u = \ln(\cos x)$ නම්, $\sin^3 x\frac{d^2y}{du^2} = \sin x\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x\frac{dy}{dx}$ බව පෙන්වන්න. (2008)

(39) a) ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \sin x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $g(x) = \cos x$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

i) $\sin(\ln(1+x^2))$ ii) $\cos(\sin x)$ x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

b) $y = \sin k\theta \operatorname{cosec}\theta$ සහ $x = \cos\theta$ යැයි ගනිමු. මෙහි k නියතයකි.

i) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy + k\cos k\theta = 0$,

ii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (k^2-1)y = 0$ බව සාධනය කරන්න. (2009)

(40) a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

b) i) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හා $z = \tan^{-1}x$ යැයි ගනිමු. $\frac{dy}{dz}$ සොයන්න.

ii) $y = e^{m\sin^{-1}x}$ යැයි ගනිමු. මෙහි m යනු නියතයකි. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ බව පෙන්වන්න. $x = 0$ හි දී $\frac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න. (2010)

(41) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x} - \sqrt{4-3\sin x}}{2x} = \frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න. (2011)

(42) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \frac{1}{17}$ බව පෙන්වන්න. (2012)

(43) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(44) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x[1-\sqrt{1+x}}$ $= -8$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(45) $n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\lim_{y\to a}\frac{y^n - a^n}{y-a} = na^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$\lim_{x\to a}\frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(46) $x \neq 0$ සඳහා $y = x \sin \frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු

i) $x \frac{dy}{dx} = y - \cos \frac{1}{x}$ හා ii) $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(47) තාත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4 \sin \theta$ යන සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}\, y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න. (2015)