ST.ANNE'S COLLEGE

KURUNEGALA

THIRD TERM TEST - 2021

GRADE 13

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය : පැය 3 යි

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ $b, c \in R$ විට මූල α හා β නම් $(\alpha - 1)^2$ සහ $(\beta - 1)^2$ මූලවන වර්ගජ සමීකරණය $x^2 - [(b+1)^2 - 2c + 1]x + (b + c + 1)^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$c = 1$ ලෙස දී ඇතිවිට $x^2 - b(b+2)x + (b+2)^2 = 0$ බව පෙන්වා මෙම සමීකරණයේමූල තාත්වික නම් $|b| \geq 2$ බව පෙන්වන්න. තවද $|b| > 2$ නම් මූල දෙකම ධන බව පෙන්වන්න.

$|b| < 2$ නම් $x = (b+2)Z$ හෝ $x = (b+2)\overline{Z}$ බවද පෙන්වන්න. මෙහි $Z = \frac{b}{2} + \frac{i\sqrt{4-b^2}}{2}$ වේ.

(b) $f(x) = ax^4 - 6x^3 + bx^2 - cx + 28$ වේ. $(x-2)^2$, $f(x)$ හි සාධකයක් හා $f(x)$, $(x+1)$ න් බෙදූවිට ,ශේෂය 36 බවදදී තිබේ. a, b, c හි අගයන් සොයා **ඒ නයින්** $f(x)$ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

12. *a.* පිරිමි හත් දෙනෙකු ද ගැහැණු තුන් දෙනෙකු ද සිටින කණ්ඩායමකින් පස් දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතු ව ඇත.

i. කිසිම විශේෂත්වයක් නොමැති ව

ii. එක් ගැහැණියෙක්වත් ඇතුළත් වන පරිදි

iii. එක්තරා ගැහැණියෙක් හා පිරිමියෙක් ඇතුළත් වන පරිදි කමිටු කී ආකාරයකට තේරිය හැකි ද?

iv. ඒ නයින්, එක්තරා ගැහැණියෙක් හා පිරිමියෙක් එකට සිටීමට අකමැති නම්, තේරිය හැකි කමිටු ගණන 175 ක් බව පෙන්වන්න.

b. $r \in Z^{+}$ සඳහා $U_r = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+4)(r+5)}$ ද $f(r) = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ද යැයි ගනිමු.

$f(r) - f(r+2) = 6U_r$ බව පෙන්වා ඒ නයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයන්න. මෙම අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$r \in Z^{+}$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{2n} W_r = U_{2n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{2n} U_r$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{2n} W_r$ ශ්‍රේණිය ද අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය ද සොයන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a-1 & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in R$ වේ.

$A^T B = C$ නම් a හා b හි අගයන් සොයන්න.

C^{-1} පවතින්නේ $a \neq 0$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$a = 2$ නම් C^{-1} ලියා දක්වන්න.

$2PC = I + C$ වන පරිදි P න්‍යාසය සොයන්න. මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b) $z, z_1, z_2 \in C$ යැයි ගනිමු.

$z + \bar{z} = 2Re(z)$ බව පෙන්වා ,$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2Re(z_1\overline{z_2})$ බව අපෝහනය කරන්න.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$ බව පෙන්වන්න.

$Re(z) \leq |z|$ බව පෙන්වා , ඉහත ප්‍රතිඵලයභාවිතයෙන් $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බවද පෙන්වන්න.

තවද $\frac{a}{|z_1 - z_2|} = \frac{b}{|z_2 - z_3|} = \frac{c}{|z_3 - z_1|}$ නම්, $\frac{a^2}{z_1 - z_2} + \frac{b^2}{z_2 - z_3} + \frac{c^2}{z_3 - z_1} = 0$ බවද පෙන්වන්න.

(c) $z = cos\theta + isin\theta$ නම්, ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයයභාවිතයෙන්

$z^{-n} = cosn\vartheta - isinn\vartheta$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\theta \in R$ හා $n \in Z^{+}$ වේ.

$-1 + \sqrt{3}i$ හා $\sqrt{3} + i$ යන සංකීර්ණ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r(cos\theta + isin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ හා $-\pi < \theta \leq \pi$ වේ.

තවද $m, n \in z^+$ විට $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^n}{(\sqrt{3}+i)^m} = 8$ නම් , $n = m + 3$ හා $n = 4k - 1$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $k \in Z$ වේ.

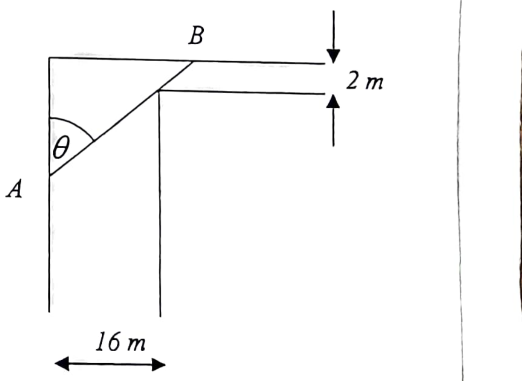
14. *a.* $x \neq -1$ සඳහා $f(x) \equiv \frac{x}{(x+1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}; x \neq 1$ බව දී ඇත. $f''(x)$ මගින් $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය දැක්වේ.

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයන්න. පළමු ව්‍යුත්පන්න ක්‍රමය භාවිතයෙන් හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ස්වභාවය නිර්ණය කරන්න. දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් නතිවර්ත ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න. ඒ නයින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි පළල $16\,m$ වූ ශාලාවක සිට පළල $2\,m$ වූ කොරිඩෝවකට AB දණ්ඩක් ගෙන යනු ලැබේ. දණ්ඩ සෑම විට ම තිරස් ව පවත්වා ගත යුතු නම්, කොරිඩෝවේ හැරුම ඔස්සේ ගෙන යාහැක දණ්ඩේ දිග සඳහා ප්‍රකාශනයක් θ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.



එලෙස ගෙන යා හැකි දණ්ඩේ උපරිම දිග $10\sqrt{5}\,m$ බව පෙන්වන්න.

15. *a.* $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ වන පරිදි A, B, C සහ D නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$ හි අගය සොයන්න.

b. Find the value of $\int_0^1 x^2 e^{2x+3} dx$ using the integration by parts.

c. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ යන සූත්‍රය ස්ථාපිත කරන්න, මෙහි a සහ b යනු නියත වේ.

$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$ හා $J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,dx$ යැයි ගනිමු. ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $I = J$ බව අපෝහනය කරන්න.

$I + J$ ලබාගන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් භාවිතයෙන්, $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

16. $3x-4y+5=0$ හා $y=2$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න. P යනු l මත ලක්ෂ්‍යයක් නම්, එහි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda+1, \lambda+2)$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ පරාමිතියකි. $B \equiv (6,1)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විශ්කම්භයක අන්ත ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $S+\lambda u=0$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකිබව පෙන්වන්න. $S=0$ යනු AB විශ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය බව අපෝහනය කරන්න. $u=0$ යනු l ට ලම්බ ව B හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න. සියළු $\lambda \in R$ සඳහා $S+\lambda u=0$ සමීකරණය සහිත වෘත්තය මත වූ ද B මතත් පුහින්න වූ ද අචල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. තව ද $S=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

17. *a.* $\sin(A-B)$ හා $\cos(A-B)$ හි ප්‍රසාරණ සැලකීමෙන්, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව අපෝහනය කරන්න.

b. $3\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - 3\sin^2\theta = 0$ හි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න..

c. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් ප්‍රමේයය සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක සම්මත අංකනයට අනුව $\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}$ බව පෙන්වන්න. $b+c=\lambda a$ නම්, $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.