සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි
All Right Reserved

බ /ධර්මපාල මහා විද්‍යාලය- බණ්ඩාරවෙල

B/ Dharmapala Maha Vidyalaya- Bandarawela

අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2021

සංයුක්ත ගණිතය I	13 ශ්‍රේණිය	කාලය : පැය 03 යි

- **සියලුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.**

01. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

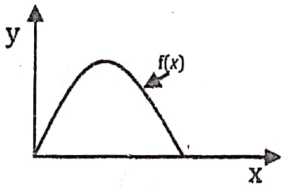
02. එකම රූප සටහනක $y = |4x - 1|$ හා $y = 1 - 2|x|$ ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. එනයින් $|2x - 1| + |x| < 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

03. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $|z - 1| \leq 1$ හා $|z - 2| = 1$ වන පරිදි ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න. එනයින් $|z|^2$ හි උපරිම අගය 3 බව පෙන්වන්න.

04. $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ප්‍රසාරණයේ 4 වන පදය x ගෙන් ස්වායත්ත වේ. $(1 + x^3)^{30}$ ප්‍රසාරණයේ තෙවන පදයෙහි x හි මාත්‍රය හා සමාන පළමු ප්‍රසාරණයේ පදය සොයන්න.

05. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \tan x}\right) = 1$ බව පෙන්වන්න.

06. $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ නම් රූපයේ දැක්වෙන වක්‍ර කොටස x අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව π^2 බව පෙන්වන්න.



07. $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1}x - 9$ මගින් දැක්වෙන වක්‍රයට $(0,3)$ හිදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

08. A හා B ලක්ෂවල x ඛණ්ඩාංකය $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ වර්ගජයද, y ඛණ්ඩාංක $y^2 + 2py - q^2 = 0$ වර්ගජයද සපුරාලයි. AB විශ්කම්භය වශයෙන් ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2ax + 2py - b^2 - q^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

09. $s = x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ වෘත්තය හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාව P හා Q හිදී ඡේදනය වේ. P හා Q හරහා ගමන් කරන $s = 0$ වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

10. $\left(\cos\frac{\theta}{4} - 2\sin\theta\right)\sin\theta + \left(1 + \sin\frac{\theta}{4} - 2\cos\theta\right)\cos\theta = 0$ හි සාධාරණ විසඳුම් ලබා ගන්න.

Scanned with CamScanner

B කොටස

ප්‍රශ්න05 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. $a)$

i. $a\epsilon\mathbb{R}$ විට $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ හි මූල තාත්වික වීමට අවශ්‍යතාවයක් ලබා ගන්නා $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ හි මූල දෙකම 3 ට වැඩිවීමට $a > 1$විය යුතු බව පෙන්වන්න.

$K \neq 1$ වූ $K(x+2)^2 - (x-1)(x-2)$ යන වර්ගජ ශ්‍රිතයේ

ii. ශ්‍රිතය අවම අගයක් ගන්නා පරිදි වූ K හි අගය පරාසයද

iii. ශ්‍රිතය කිසි විටකත් 12.5 අගය නොයික්මවන පරිදි K හි අගය පරාසයද සොයන්න.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + a - b,\ a, b\epsilon R - \{0\}$ යන බහුපදය සලකන්න. a හා b සඳහා ගන්නා ඕනෑම අගයකදී $(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

තවද, $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වන අතර $f(x)$ යන්න $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 12 වේ. a හා b සොයා $f(x)$ යන්න සම්පූර්ණයෙන්ම සාධක වලට වෙන් කරන්න. එනයින්, $f(3x^2)$ යන්නද සම්පූර්ණයෙන් සාධක වලට වෙන් කර දක්වන්න.

12. a) 1,1,2, 3,3,4,6 යන සංඛ්‍යා කාඩ්පත් 07 ක වෙන වෙනම ලියා සංඛ්‍යාංක 7 ක අගයක් සැදෙන පරිදි පෙලට අතුරා තිබේ.

i. එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යාංක 7 ක ඉලක්කම්

ii. මෙම සංඛ්‍යා වලින් ඔත්තේ සංඛ්‍යා

iii. මෙම සංඛ්‍යාවලින් 4 න් බෙදෙන සංඛ්‍යා

iv. මෙම සංඛ්‍යාවලින් ආරම්භ වන සහ අවසාන වන සංඛ්‍යාව එකම ඉලක්කම වන සංඛ්‍යා කොපමණ තිබේදැයි සොයන්න.

b) $1 + (1+x)y + (1+x+x^2)y^2 + (1+x+x^2+x^3)y^3 + \ldots..$ පද n වූ ශ්‍රේණියේ r වන පදය T_r සොයන්න.

$T_r = V_r - u_r$ වන ලෙස r හි ශ්‍රිතයක් වන V_r, U_r සොයන්න.

එමඟින් $\sum_{r=1}^{n} Tr$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} Tr$ අභිසාරී බවද, $\sum_{r=1}^{\infty} Tr = \frac{1}{(1-xy)(1-y)}$ බවද අපෝහනය කරන්න.

13. $a)$ i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ වේ. $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ වන පරිදි λ, μ නියත සොයන්න. එනයින්,

$3x + 2y = 1$

$x + y = 5$ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ නම්, $A^2 = 3A - 2I$ බව පෙන්වන්න. එනයින් A^{-1} සොයන්න.

Scanned with CamScanner

b)

i. $-24 - 18i$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි වර්ග මූලය නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ii. $|z + 2i - 2\sqrt{3}| \le 2$ හා $\frac{5\pi}{3} \le \arg(z) \le \frac{11\pi}{6}$ සඳහා Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන සියලුම කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

iii. P, Q, R යනු ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙලින් Z_0, Z_1 හා $, Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ 3 ක් යැයි ගනිමු.

iv. $PQ = PR$ ද θ යනු PQ සිට PR ට වාමාර්ථ ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්,

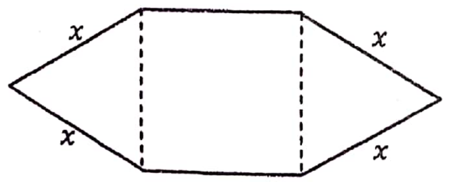
$Z_2 - Z_0 = (Z_1 - Z_0)\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාර්ත ලෙස මනින ලද A, B, C හා D ලක්ෂ ආගන්ඩ් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් $1 - i$ හා Z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z ඇසුරෙන් සොයන්න. $AC = 2$ වන අයුරින් C විචලනය වේ නම් B හි පථය ආගන්ඩ් සටහනෙහි සොයන්න.

14.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 3}{(x-1)^2}$; $x \neq 1$ යන ශ්‍රිතය සලකන්න. $y = f(x)$ වක්‍රය x හා y අක්ෂ ඡේදනය කරන ස්ථානවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් $f(x)$ ට ඇත්තේ එක් හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් බවත් එය උපරිමයක් බවත් පෙන්වන්න. $f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් වක්‍රයට පවතින නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. තවද වක්‍රය උඩු අවතල හා යටි අවතල වන ප්‍රදේශ සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න. $y = f(x)$ අනුරේඛනය කරන්න. එනයින්, $f(x)$ ශ්‍රිතයෙහි වසම $R - \{1\}$ වන විට ශ්‍රිතයෙහි පරාසය සොයන්න.

b) රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයේ කම්බි රාමුවක් තනා ඇත්තේ l දිගැති කම්බියකිනි. රාමුවේ දෙපස සමපාද ත්‍රිකෝණ දෙකක් ඇති අතර මැද කොටස සෘජුකෝණාස්‍රාකාර වේ. ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග x නම් රාමුවේ වර්ගඵලය $A(x) = \frac{xl + (\sqrt{3} - 4)x^2}{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



කම්බි රාමුවේ වර්ගඵලය උපරිම වන්නේ x හි කුමන අගයක දී දැයි සොයන්න. $l = 182cm$ නම් එවිට උපරිම වර්ගඵලයෙහි අගය අපෝහනය කරන්න.

15. a) සුදුසු ආදේශයක් උපයෝගී කර ගනිමින් $\int_a^b f(a + b - x)dx = \int_a^b f(x)dx$ බව ලබාගන්න. මෙහි a හා b නියත වේ. ඉහත ප්‍රතිඵලයෙහි $f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + \ln(3-x)}$ යැයි ගනිමින් $\int_1^2 \frac{\ln x . dx}{\ln(3x - x^2)} = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

b) සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින් $\int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2\sqrt{1-4x^2}\ dx$ අගයන්න.

c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \ln(1+x^2)\,.dx$ සොයන්න.

16. $a)$ PQR ත්‍රිකෝණයක PQ, QR, RP පාද පිළිවෙලින් $x-3y+5=0$, $y-x-3=0$ හා $3x-y-1=0$ සමීකරණ මගින් නිරූපණය වේ. QR ට ලම්බව P ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවත්, PR ට සමාන්තරව Q ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවත් S ලක්ෂයේදී හමුවේ. QS හා PS වල සමීකරණ සොයන්න. එනයින් PQSR රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.

$b)$ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යන වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි නම්, $g^2=c$ බව පෙන්වන්න. S යනු $(a,1)$ ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රය වූ ද අරය 1 ක් වූද වෘත්තය නම්, එහි සමීකරණය සොයන්න. මෙහි $a\epsilon\mathbb{R}$ වේ. $l \equiv x-y+1=0$ නම් s වෘත්තය සහ l රේඛාව ඡේදනය වීමට අවශ්‍යතාව $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න. s හා l හි ඡේදන ලක්ෂය හරහා යන සාධාරණ වෘත්තයක සමීකරණය ලියා දක්වන්න. එනයින් s හා l හි ඡේදන ලක්ෂ හරහා යමින් x අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෙනත් වෘත්තයක කේන්ද්‍රය $(-a-2, 2a+3)$ බව පෙන්වන්න.

17. (a) $\sin^4\theta\cos^2 2\theta + \cos^4\theta \sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 2\cos 2\theta - 2\cos 6\theta + 3)$ යන සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න. θ සඳහා සුදුසු අගයක් ආදේශයෙන් $3\sin^4\frac{\pi}{12} + \cos^4\frac{\pi}{12} = \frac{(7-2\sqrt{3})}{4}$ බව පෙන්වන්න.

b) ABC ත්‍රිකෝණයක $B\hat{C}D = C\hat{B}E = \theta$ වන පරිදි පිළිවෙළින් AB හා AC මත වූ ලක්ෂ දෙකක් D හා E වේ. ABC හා BCE ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය යොදා ගනිමින් සුපුරුදු අංකනයෙන් $BE = \frac{ab\sin c}{a\sin\theta + c\sin(B-\theta)}$ බව පෙන්වන්න. CD සඳහා ද එවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

c) $tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + cot^{-1}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = \frac{\pi}{3}\ (x>0)$ විසඳන්න.

Scanned with CamScanner