A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව සාධනය කරන්න.

2. එකම රූප සටහනක $y = x^2 + x$ හා $y = |x + 2|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. ඒ නයින්

$x^2 - |x + 2| + x > 0$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

3. $Arg(z - 3 - \sqrt{3}i) = -\frac{5\pi}{6}$ වන පරිදි ආගන්ඩ් සටහනේ z හි පථය අඳින්න. එනයින් $|2z - 3|$ හි අවම අගය සොයන්න.

4. $\left(x^2 - \frac{2k}{x}\right)^{10}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^2 සහිත පදයේ සංගුණකය $\frac{1}{x}$ සහිත පදයේ සංගුණකයට සමාන වන k හි අගයන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

7. xy තලයේ ඇති C වක්‍රයක් $x = 2 - \cos 2\theta$, $y = 1 + \sin\theta$ ලෙස දී ඇත. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි.

$\theta = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ වූ C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය $A = \left(1, \frac{5}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම් ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

8. $x - 3y + 1 = 0$ හා $2x + 5y - 9 = 0$ යන රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සහ මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{5}$ ක දුරින් පිහිටි සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

5. $\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x})\sin x}{x^3} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = x^2$ හා $y = x$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x − අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න

9. (4, 3) [illegible] $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ [illegible]

10. $\cos x + \sin 2x - \sin x = 1$ [illegible]

Scanned with CamScanner

මහානාම විද්‍යාලය

කොළඹ 03

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය , 2021

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය ,2021 දෙසැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය I

10	S	1

B කොටස

11. (a) i. $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ සහ $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත. එය සොයන්න.

ii. තව ද $ab(a + b) + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

iii. පොදු මූලය හැරුණු විට ඉහත වර්ගජ සමීකරණ දෙකේ ඉතිරි මූලවලින් තෘප්ත කරන සමීකරණය $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $P(x)$ යනු මාත්‍රය තුන වූ බහුපදයකි. එහි නායක සංගුණකය එක වේ. $P(x)$, $(x-1)$ හා $(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 7 හා 13 වේ. $P(x)$, $(x-1)(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න. තව ද $P(2) = 6$ ලෙස දී ඇත්නම් $P(x)$, $(x-1)(x-3)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය සොයා $P(x)$ බහුපදය ලියන්න.

12. (a) $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + - - - -$ යන ශ්‍රේණියේ r වන පදය ලියන්න. $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි V_r ලබා ගන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. ශ්‍රේණිය අභිසාරීවේද?

(b) පස් දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමක් පිරිමි 6 දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැණු 5 දෙනෙකුගෙන් පිහිටුවිය යුතුය.

(i) සියලු දෙනාටම එකම ආකාරයේ හැකියා තිබෙ නම් මෙලෙස සැකසිය හැකි කණ්ඩායම් කියක් තිබේද?

(ii) එක්තරා පිරිමියකු හා එක්තරා ගැහැණියක කණ්ඩායමෙ සිටින සේ කණ්ඩායම් කියක් සැකසිය හැකිද?

13.

(a) $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ හා $Z_1 = x_1 + iy_1$ ලෙස දී ඇත්නම් පහත දෑ සාධනය කරන්න.

i. $i(\bar{Z}_1 - Z_1) = 2Im(Z_1)$

ii. $|Z_1|^2 = Z_1\bar{Z}_1$

ඉහත ii හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් පහත දෑ පෙන්වන්න.

iii. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

iv. $|1 - iZ_1|^2 = 1 + 2Im(Z_1) + |Z_1|^2$

තවද $|Z_1 - i|^2$ සඳහා ඉහත iv හි ප්‍රකාශනය හා සමාන ප්‍රකාශනයක් ලබාගන්න.

$\left|\frac{1-iZ_1}{Z_1-i}\right| = 1$ නම් Z_1 හුදෙක් තාත්වික සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් බව අපෝහනය කරන්න.

(b) සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් $Z_1 = (\cos\theta_1 + \sin\theta_1\, i)$ හා $Z_2 = (\cos\theta_2 + \sin\theta_2\, i)$ ලෙස දී ඇත

Scanned with CamScanner

$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$ බව පෙන්වන්න.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$[\cos(p\theta) + i\sin(p\theta)][\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)] = \cos\{(p+2)\theta\} + i\sin\{(p+2)\theta\}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\frac{(1+\sqrt{3}i)^m}{(1-\sqrt{3}i)^n} = 2^n$ විට m හා n හි අගයන් සොයන්න.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ලෙස දී ඇති විට $A^2 - 5A - 2I = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින් A^{-1} සොයන්න.

$A + aA^{-1} = bI$ වන පරිදි a හා b සොයන්න.

$B.[A - 2A^{-1}].C = D$ වන පරිදි B න්‍යාසය සොයන්න. මෙහි $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ වේ.

14. (a) $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-2)^2}$; $x \neq 2$ ලෙස ගනිමු. $f(x)$ හි පළමුවන අවකලන සංගුණකය $f'(x)$ වන $f'(x) = \frac{6-x}{(x-2)^3}$; $x \neq 2$ බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x)$ හි වැඩිවන හා අඩුවන පරාස සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. $f''(x) = \frac{2(x-8)}{(x-2)^4}$; $x \neq 2$ බව දී ඇත. නති වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍ය , ස්පර්ශෝන්මුඛ හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි දළ වක්‍රය අඳින්න.

(b) $3h$ උස AB කොඩිනැගිල්ලක පාදම B හි සිට x දුරකින් පොළොව මත C ලක්ෂ්‍යය ඇත. D ලක්ෂ්‍යය කොඩිනැගිල්ල මත පිහිටා ඇත්තේ $AD = 2h$ වන පරිදිය. $A\hat{C}D = \theta$ ලෙස දී ඇත. හා h, x මගින් $\frac{d\theta}{dx}$ ප්‍රකාශකර θ හි උපරිම අගය ගණනය කරන්න. θ උපරිම වන x හි අගය ගණනය කරන්න.

15. (a)(i) $f(x) = \frac{4-2x}{(2x+1)(x+1)(x+3)}$ භින්න භාග වලින් ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\int f(x)dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_0^2 f(x)dx$, $\ln k$ ආකාරයට දක්වන්න.මෙහි k නියතයකි.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ සොයන්න.

(c) a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$\int_0^\pi x\cos^4 x\sin x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^4 x\sin x\, dx$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\int_0^\pi x\cos^4 x\sin x\, dx = \frac{\pi}{5}$ බව ද පෙන්වන්න.

16. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය හා $l \equiv ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව A සහ B හිදී එකිනෙක ඡේදනය කරයි. λ පරාමිතියක් විට A , B හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය

$S + \lambda l = 0$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0$ සහ $l \equiv x - y + 2 = 0$ විට, AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති S_1 වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. S_1 වෘත්තයක් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයත් බාහිරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන, $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියන්න.

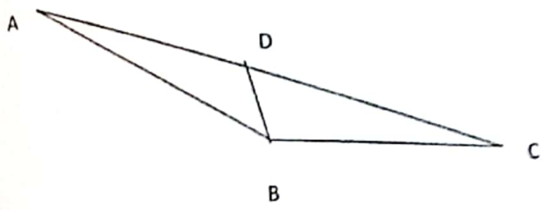
Scanned with CamScanner

17. (a). $\tan(A-B)$ හි ප්‍රසාරණය යොදා ගනිමින් , $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x}$ බව පෙන්වන්න. තවද, $\tan 7\frac{1^\circ}{2} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ බව පෙන්වා ,

$\cot 7\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දී ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$ කෝණය මහා කෝණයකි. AC මත D පිහිටා ඇත්තේ AD = BC වන පරිදිය.
$B\hat{C}D = \beta$, $C\hat{B}D = 2\beta$, $B\hat{A}C = \alpha$ වේ. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන් $\sin\beta \sin(\alpha+3\beta) = \sin\alpha \sin 3\beta$ බව පෙන්වන්න.

$\sin(\alpha+3\beta) = \sin\alpha(3-4\sin^2\beta)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner