සියළුම හිමිකම් ඇවිරිනි / All Rights Reserved

ධර්මරාජ විද්‍යාලය - මහනුවර
Dharmaraja College - Kandy

අවසාන වාර විභාගය 2021 දෙසැම්බර් - 13 ශ්‍රේණිය
Final Term Test - 2021 December– Grade 13

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Mathematics II

10 | S | II

පැය තුනයි
Three hours

විභාග අංකය :.................................

වැදගත්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය පිටු 9 කින් යුක්ත වේ
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය A සහ B යන කොටස් දෙකකින් යුක්ත වේ. කොටස් දෙකටම නියමිත කාලය පැය තුනකි.
- ගණක යන්ත්‍ර භාවිතයට ඉඩ දෙනු නොලැබේ.

A කොටස - ව්‍යුහගත රචනා
(පිටු 1 - 5)
සියලුම ප්‍රශ්න වලට පිලිතුරු මෙම පත්‍රයේම සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ඉඩ සලසා ඇති තැන්වල ලිවිය යුතුය. මේ ඉඩ ප්‍රමාණය පිළිතුරු ලිවීමට ප්‍රමාණවත් බව ද දීර්ඝ පිළිතුරු බලාපොරොත්තු නොවන බවද සලකන්න.

B කොටස - රචනා
(පිටු 6- 9)
මෙම කොටස ප්‍රශ්න 7 කින් සමන්විත වේ.
ප්‍රශ්න 5 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

සම්පූර්ණ ප්‍රශ්න පත්‍රයට නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A හා **B** කොටස් **එක් පිළිතුරු පත්‍රයක් වන සේ" කොටස උඩින්** තිබෙන පරිදි අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න ප්‍රශ්න පත්‍රයේ **B** කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

දෙවැනි පත්‍රය සඳහා		
කොටස	ප්‍රශ්න අංක	ලැබූ ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
B	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
එකතුව		

අවසාන ලකුණු

A කොටස

1. ස්කන්ධය m වූ සුමට ගෝලයක් u ප්‍රවේගයකින් සුමට තිරස් තලයක චලනය වෙමින් නිශ්චලව ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ගොලයාක් සමග සරල ලෙස ගැටේ. ගැටීම හේතුවෙන් පද්ධතියේ චාලක ශක්ති හානියට ප්‍රකාශනයක් ලබාගන්න. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e.

2. අංශු දෙකක් එකම වේගයෙන් තිරස් බිමක වූ O ලක්ෂයක සිට තිරසට α හා β ආනතව එකම සිරස් තලයක චලිත වන පරිදි ප්‍රක්ෂේපණය කරයි. අංශු දෙකම තිරස් බිමේ වූ P ලක්ෂය මත පතිත වේ නම්, $cosec\,\alpha = \sec\beta$ බව පෙන්වන්න.

3. A, B, C අංශු වල ස්කන්ධ පිලිවෙලින් m, M, m වේ. P, Q සුමට කප්පි වේ. රළු මේසයක් මත B ඇත. ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. B ට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තු දෙක P, Q සුමට කප්පි මතින් දමා සිරස්ව එල්ලෙන A, C අංශුවලට සවිකර පද්ධතිය නිසලතාවයෙන් මුදා හල විට පහලට C චලිත වේ නම්, $\mu M < M - m$ බව පෙන්වන්න.

4. මෝටර් රථයක් සමතලා මාර්ගයක නියත 500 N බලයකට ප්‍රතිවිරුද්ධව චලනය වේ. රථයේ ස්කන්ධය $1500\, kg$ වේ. මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය $50\, ms^{-1}$නම් රථයේ ක්ෂමතාවය සොයන්න. තවද ආනත තලය තිරසට $\sin^{-1}(\frac{1}{15})$ ආනත වේ නම් ආනත තලය ඉහලට රථයේ උපරිම ප්‍රවේගය සොයන්න. ($g = 10ms^{-2}$, එම ප්‍රතිරෝධයම පවතී)

5. $6l$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් සුමට තිරස් මේසයක් මත වූ $3m$ ස්කන්ධයකට ද අනික් කෙළවර 2m ස්කන්ධයකටද ගැටගසා ඇත. $2m$ ස්කන්ධය මේසයේ කෙළවර සිට $5l$ දුරින්ද තන්තුව බුරුල්ව පවතින පරිදි තබා නිසලතාවයේ සිට මුදාහරි.තන්තුව තදවී මොහොතකට පසු අංශුවල වේගය $\frac{2}{5}\sqrt{2gl}$ බව පෙන්වන්න.

6. $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0, |\underline{a}| = 3, |\underline{b}| = 5, |\underline{c}| = 7$ බව දී ඇත $\underline{a}, \underline{b}$ අතර කෝණය සොයන්න.

7. ඒකාකාර නොවන PQ දණ්ඩක් තිරසට θ කෝණයකින් ආනතවූ සුමට තලයක් මත P පහල කෙලවර සිටින සේ ද Q කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වනසේ සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටා ඇත. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G ද තිරසට එහි ආනතිය γ ද නම් $\frac{PG}{GQ} = \frac{\sin\theta \sin\gamma}{\cos(\theta+\gamma)}$ බව පෙන්වන්න.

8. ඒකාකාර බර දණ්ඩක් රළු වෘත්ත වළල්ලක් මත නිසා නිශ්චලව පවතී. දණ්ඩ වළල්ලේ කේන්ද්‍රයේ 120° කෝණයක් ආපාතනය කරයි. එය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතින විට තිරසට ආනත කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{4\mu}{1-3\mu^2}\right)$බව පෙන්වන්න. ඝර්ෂණ සංගුණකය μ.

9. $P(A) = 0.6\,, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.81$ නම් $P(A \cap B), P(A \cup B)', P(A \cap B'), P(A' \cup B')$ සොයන්න.

10. නිරීක්ෂණ 12ක පද්ධතියක් මධ්‍යනය 4 හා සම්මත අපගමනය 2 කි. නිරීක්ෂණ 20 දෙවැනි පද්ධතියක් එකතු කළ විට මධ්‍යනය $\frac{37}{8}$ වේ. දෙවන නිරීක්ෂණ පද්ධතියේ මධ්‍යනය සොයන්න.

B කොටස

11.

(a) සරල රෙඛීය මාර්ගයක රථයක් නියත a ත්වරණයකින් චලනය වේ. A නම් ලක්ශීය ස්ථානයක් මෙම රථය පසු කරනුයේ u නම් ප්‍රවේගයකින් වන අතර එය, 2u ප්‍රවේගයක් දක්වා ත්වරණය කර අනතුරුව නියත ප්‍රවේගයෙන් චලිත වේ. මේ අතර නිවසේ සිටින පුද්ගලයා රථයේ සිටින තමාගේ යහළුවා ඔහුගේ බෑගය අමතක කොට ගොස් ඇති බව වටහා ගත් පසු, තම යතුරු පැදියෙන් අතුරු මාර්ගයක් හරහා A ලක්ෂ්‍යය වෙත නිශ්චලතාවයෙන් එළඹෙන්නේ රථය A ලක්ෂ්‍යය පසුකර $\frac{u}{2a}$ කාලයකට පසුවය. නැවතත් තම යතුරු පැදිය එම මොහොතේම ක්‍රියාත්මක කොට $3a$ නියත ත්වරණයකින් රථය ලුහුබඳී. $\frac{v}{3a}$ කාලයක් ගතවන තුරු ත්වරණය කර අනතුරුව $3a$ නියත මන්දනයෙන් චලිත වේ. යතුරු පැදිකරු තම යතුරු පැදිය රථයේ ආසන්නයටම යන්තමින් පැමිණේ. ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාර එකම සටහනේ නිර්මාණය කර ඒ ඇසුරින් $v = \left(4+\sqrt{14}\right)\frac{u}{2}$ බව පෙන්වන්න. (යතුරු පැදිකරුගේ අතුරු මාර්ගයේ චලිතය අනවශ්‍යයි.)

(b) එක්තරා මොහොතක A නැවකට ගිනිකොණ දෙසින් a දුරින් B නැවක් පැවතුනි. B හි ප්‍රවේගය v වෙයි. A නැව $\frac{4v}{3}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට චලිත වේ. B ට v ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීයව චලිත වී A හමුවීම සඳහා චලිත විය හැකි දිශා දෙකක් පවතී. එම දිශා දෙක නිරූපණය කරමින්, ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම සටහනේ නිර්මාණය කරන්න. එම එක් එක් ක්‍රමයට B ට A හමුවීමට ගතවන කාලයන් අතර අන්තරය $\frac{6}{7v}$ බව සාධනය කරන්න.

12.

(a) ස්කන්ධය M වන සුමට ABC කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. කුඤ්ඤයේ තිරසට α ආනත AB සුමට තලය මත පාමුල A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $u\sin\alpha$ ප්‍රවේගයෙන් ස්කන්ධය $km\,kg$ වන P අංශුවක් ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව නැවත A ට පැමිණීමට කාලය $\frac{2u(M+km\sin^2\alpha)}{(M+km)g}$ බව පෙන්වන්න.

(b) අඩ සිරස් කෝණය θ වූ කුහර කේතුවක ශීර්ෂය C වේ. C ඉහළින්ම හා අක්ෂය සිරස් වන පරිදි කේතුව අචලව සවිකර ඇත. අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට A හා B සර්වසම අංශු දෙකක් අමුණා ඇත. තන්තුව C ශීර්ෂයේ ඇති කුඩා සිදුරක් තුළින් යවා A අංශුව කේතුවේ පෘෂ්ඨය මත නියත ω කෝණික ප්‍රවේගයකින් තිරස්ව වෘත්තයක චලනය වේ. B අංශුව කේතුව තුළ නිදහසේ එල්ලෙමින් පවතී. CA = a නම්, $\omega^2 = \frac{g}{a(1+\cos\theta)}$ බව සාධනය කරන්න.

13

(a) O, A, B යනු $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වන එකම සරල රේඛාවක් මත නොපිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. P හා Q යනු $2\overrightarrow{OQ} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\left|\frac{\underline{a}}{\underline{b}}\right|\underline{b}$ වූ ලක්ෂ්‍ය වේ. $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PA}$, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර $\underline{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, $\underline{b} = |\underline{b}|\frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA}}{|\underline{a}|}$ බව අපෝහනය කරන්න. R යනු $AR : RB = |\underline{a}| : |\underline{b}|$ වන සේ AB මත පිහිටි ලක්ෂයකි. $\overrightarrow{OR}$ සොයන්න. එනයින්

i. $0, P, R$ ඒක රේඛීය බවත්
ii. $2\left|\overrightarrow{OP}\right| > \left|\overrightarrow{OR}\right|$ බවත් පෙන්වන්න.

(b) A, B, C, D යනු පැත්තක දිග මීටර් a වූ සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. විශාලත්වය නිව්ටන් $4, 6\sqrt{2}, 8, 10, X$ හා Yවූ බල පිළිවෙළින් AD, CD, AC, BD, AB හා CB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය OE දිගේ ක්‍රියා කරන තනි සම්ප්‍රයුක්තයකට ඌනනය වේ. මෙහි O හා E යනු පිළිවෙළින් AC හා CD වල මධ්‍ය ලක්ෂ වේ. Xහා Y හි අගයයන් සොයා, සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය නිව්ටන් 4k බව පෙන්වන්න.
මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.
F යනු $0AFD$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. ඉහත බල පද්ධතියට තුල්‍ය වන, එකක් AD ද දිගේ ද අනෙක F ලක්ෂ්‍යය හරහා ද වන, බල දෙක සොයන්න.
බල පිහිටන තලයේ $ABCD$ අතට ක්‍රියාකරන ඝූර්ණය නිව්ටන් මීටර් $6ka$ වන බල යුග්මයක් මුල් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි රේඛාව සොයන්න.

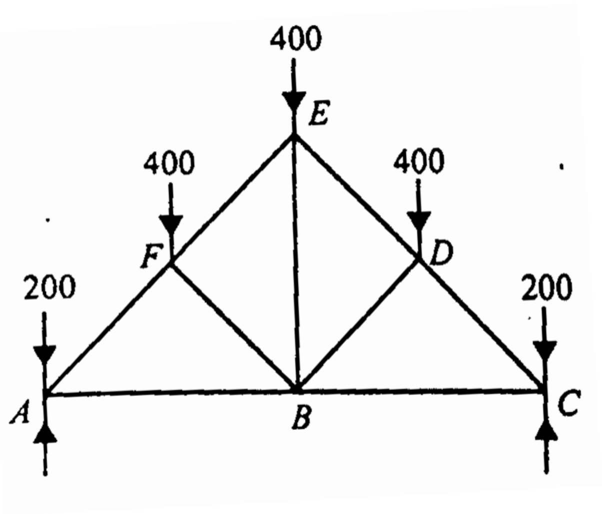
14.

තිරසට $\frac{\pi}{6}$ කෝණයකින් ආනත ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{\sqrt{3}}{4}$ වන රළු අචල තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත $OA = a/2$ හා $AB = a/2$ වන පරිදී O ඉහලම ලක්ෂය ලෙස ඇතිව O, A, B ලක්ෂ්‍ය එම පිලිවෙලින් පිහිටා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O ලක්ෂයකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇත. P අංශු ආරම්භයේ දී A හි තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා A, B දිශාවට චලිත සමීකරණ භාවිතයෙන් P අංශුවේ ප්‍රවේගය $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න. ඉන්පසු අංශුවේ චලිතය සඳහා තන්තුවේ විතතිය x වූ විට, $\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{a}{32}\right)$ බව පෙන්වන්න.
$y = x - \frac{a}{32}$ යැයි ලිවීමෙන්, $\ddot{y} + \frac{4g}{a}y = 0$ බව පෙන්වන්න. ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් α, β, ω නියත සොයන්න. එනයින් P අංශුව යෙදෙන සරල අනුවර්ති චලිතය කේන්ද්‍රය $x = \frac{a}{32}$ විට ලැබෙන බවත් විස්තාරය $\frac{31\sqrt{a}}{32\sqrt{33}}$ බවත් පෙන්වන්න. අංශුව ළඟාවන පහළම ලක්ෂය C නම් A සිට C දක්වා චලිතයට P මගින් ගනු ලබන කාලය බව $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{4\sqrt{2} + \tan^{-1}\left(4\sqrt{2}\right)\right\}$ පෙන්වන්න.

15.

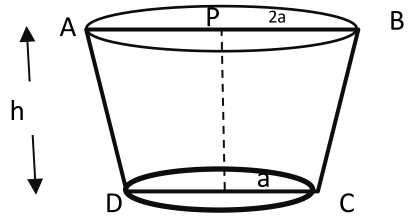
(a) එකම දිගින් යුත් ඒකාකාර දඬු 4 ක් P, Q, R, S දී සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් PQRS සමචතුරස්‍රය තනා ඇත. P සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති මෙම සැකිල්ලේ සමචතුරස්‍රාකාර හැඩය පවත්වා ගැනීමට QR හා RS දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ යා කරන සැහැල්ලු තවත් දණ්ඩක් යොදා ඇත. එක් එක් දණ්ඩේ බර w නම්, සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම 4w ද, R සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{5w}{2}$ බව ද පෙන්වන්න. පද්ධතිය සිරස් තලයේ සමතුලිතව පවතී.

(b) සටහනෙන් නිරූපණය වන්නේ ලුහු දඬු නවයක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමටව සන්ධි කිරීමෙන් තනනු ලැබූ රාමු සැකිල්ලකි. AB හා BC යන එක් එක් දඬු $3\,m$ බැගින් දිගින් යුක්ත වේ. BE හි දිග $1.5\,m$ කි. AF, FE, ED, DC දඬු දිගින් සමාන වේ. A සහ C හිදී සුමට ආධාරක දෙකක් මත තබා ඇති මෙම රාමු සැකිල්ල මත සටහනේ පරිදි භාර යොදා ඇත. සියළු බල N වලින් මනිනු ලැබේ. ප්‍රත්‍යා බල රූප සටහනක් ඇඳ AF, FE, BD, BC දඬුවල ප්‍රත්‍යා බල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග විනිශ්චය කරන්න.



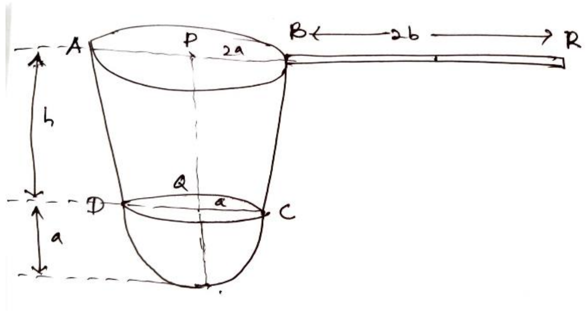
16

පහත රූපය මගින් නිරූපණය වන්නේ $ABCD$ ඍජු වෘත්ත කේතුවක උස h වූ ඡින්නකයක ආකාරයේ, පෘෂ්ඨ ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර වස්තුවකි. එහි වෘත්තාකාර තල මුහුණත් වල විෂ්කම්භ $AB = 4a$ හා $CD = 2a$ වේ. එහි ස්කන්ධය $3\pi ak\sigma$ බවත් එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AB මුහුණත කේන්ද්‍රයේ, P සිට $\frac{4h}{9}$ දුරකින් පිහිටන බවත්, අනුකලනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න. මෙහි $k = \sqrt{h^2 + a^2}$ වේ.



එම σ පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය ම සහිත අරය a වූ අර්ධ ගෝලීය කබොලක්, ඉහත ඡින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකාර CD ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය PQ මත P සිට $\frac{3a^2+6ha+4hk}{3(3k+2a)}$ දුරකින් පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

භාජනයේ බර 4w යැයිද , $h = \frac{3a}{4}$ යැයි ද, ගනිමු. දිග $2b$ හා බර w වූ සිහින් ඒකාකාර BK දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, A, P, B හා R ලක්ෂ ඒක රේඛීය වන පරිදි, රූපයේ දැක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර ඇත.



මිට සහිත භාජනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට PQ සිට දුරත් PR සිට දුරත් සොයන්න. මෙම භාජනය A ලක්ෂයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර මිට යටි අත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\frac{2}{19}\right)$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $8a = b$ බව පෙන්වන්න.

17

(a) ලාච්චු දෙක බැගින් ඇති සර්වසම සේප්පු 3 ක් ඇත. 1 වන සේප්පුවේ එක් ලාච්චුවක රන් කාසියක් ද අනෙක් ලාච්චුවේ රිදී කාසියක් ද ඇත. 2 වන සේප්පුවේ එක් ලාච්චුවක රන් කාසියක් ද අනෙක් ලාච්චුවේ ද රන් කාසියක්ද ඇත. 3 වන සේප්පුවේ ලාච්චු දෙකේම රිදී කාසිය බැගින් ඇත. සසම්භාවී ලෙස සේප්පුවක් තෝරාගෙන ලාච්චුවක් ඇර එහි ඇති කාසිය ඉවතට ගනු ලැබේ. මෙසේ ඉවතට ගත් කාසිය රන් එකක් නම් අනෙක් ලාච්චුවේ රිදී කාසියක් තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) අවුරුදු 25 - 65 අතර රෝගීන් 550 දෙනෙකු පිළිබඳ කරන ලද අධ්‍යනයකදී සොයාගත් හෘද රෝගීන් සංඛ්‍යා පහත දැක්වේ.

වයස	25 -29	30 - 34	35 - 39	40 -44	45 - 49	50 -54	55 - 59	60 - 64
රෝගීන් ගණන	12	60	85	120	105	85	70	13

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.
මෙම රෝගීන්ගෙන් 250 දෙනෙකු කාන්තාවන් විය. ඔවුන්ගේ වයසේ මධ්‍යන්‍යය 50 කි. පිරිමින්ගේ මධ්‍යන්‍යය වයස සොයන්න.