සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි.

10 S I

නාලන්දා විද්‍යාලය - කොළඹ 10
NALANDA COLLEGE - COLOMBO 10
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර උසස් පෙළ විභාගය 2021
අනාවරණ පරීක්ෂණය - 2021
සංයුක්ත ගණිතය - I
13 ශ්‍රේණිය

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

B කොටස

11. (a) $f(x) = x^3 + x^2 + b$ හා $g(x) = ax^3 + bx^2 + x - a$ යනු x හි බහුපද දෙකකි. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$b \neq a$ $f(x)$ හා $g(x)$ ට පොදු සාධකයක් ඇත්නම්, එය $h(x) = (b-a)x^2 + x - a(1+b)$ හි ද සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

$k(x) = 2x^2 - x$ බහුපදයට හා $h(x)$ බහුපදයට එකම ශුන්‍ය ලක්ෂ්‍ය පවතියි නම්, $a > 0$ විට, a ට හා b ට ගතහැකි අගයන් සොයන්න.

$h(x)$ හා $k(x)$ යන වර්ගජ ශ්‍රිතවල අඩුතම/වැඩිතම අගයන් නිර්ණය කර, එම ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න. ශුන්‍ය ලක්ෂ්‍ය, අඩුතම/වැඩිතම ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = h(x)$ හා $y = k(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.

$h(x) = p$ වන වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ගනිමු. මෙහි $p \in \mathbb{R} - \{0\}$

(i) α හා β හි එකතුව හෝ ගුණිතය නොසොයා, $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ හා $\dfrac{\beta}{\beta+1}$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

(ii) α හා β හි එකතුව හා ගුණිතය සෙවීමෙන් $\dfrac{\alpha}{\beta}$ හා $\dfrac{\beta}{\alpha}$ මූලවන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x) = kx^3 - x^2 - kx + p,\ k \in \mathbb{Z}^+$ වේ. $f(x)$, $(x-2)$ න් බෙදූවිට, ශේෂය $3(2k-1)$ නම් p සොයා, $f(x)$ පූර්ණ ලෙස සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. (a) එන්නත්කරණයෙන් අනතුරුව සිදුකරන ප්‍රතිදේහ පරීක්ෂාවක් සඳහා පහත ආකාරයෙන් රුධිර සාම්පල දොළහක් ලැබී තිබේ

අවුරුදු 60 ට වැඩි PCR + වන සාම්පල තුනක්
අවුරුදු 30 - 60 අතර PCR + වන සාම්පල දෙකක්
අවුරුදු 18 - 30 අතර PCR + වන සාම්පලයක්
අවුරුදු 60 ට වැඩි PCR – වන සාම්පල දෙකක්
අවුරුදු 30 - 60 අතර PCR – වන සාම්පල තුනක්
අවුරුදු 18 - 30 අතර PCR – වන සාම්පලයක්

විවිධ පරීක්ෂණ සඳහා පහත ආකාරවලට හතර දෙනෙකුගේ රුධිර සාම්පල ඇතුළත් කට්ටල සෑදිය යුතු නම්, පහත එක් එක් අවස්ථාවන්හිදී සෑදිය හැකි එකිනෙකට වෙනස් කට්ටල ගණන සොයන්න.

(i) කිසිදු තේරීමක් නැතිවිට

(ii) අවුරුදු 60 ට වැඩි පුද්ගලයින්ගේ සාම්පල පමණක්

(iii) PCR + අයගේ සාම්පල පමණක්

(iv) අවම වශයෙන් PCR + සාම්පල 2 ක්

ඉහත සාම්පල දොලහ ලබාගෙන ඇත්තේ, එන්නත්කරණ දිනයේ සිට එකිනෙකට වෙනස් දින දොලහකදී නම්, දිනයද සැලකිල්ලට ගන්නේ නම්, ඉහත (ii), (iii) අවස්ථාවලදී සෑදිය හැකි විවිධ කට්ටල ගණන කීයද?

(b) $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ වන අපරිමිත ශ්‍රේණියේ $f_{(r)} = \dfrac{-(Ar+B)}{2(r+2)(r+3)}$ හා

$U_r = f_{(r)} - f_{(r-1)}$ වන පරිදි A, B නියත සොයන්න.

මෙම අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව පෙන්වා එහි පද අනන්තයට ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ යැයි දී ඇත.

(i) A^2 සොයා, $A^3 = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $A^2 = pA + qI$ වන පරිදි p, q නියත සොයන්න. මෙහි I යනු 2×2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(iii) $A^3 = pA^2 + qA$ බව අපෝහනය කර $A^3 = rA + sI$ ආකාරයට ලියා r හා s නියත සොයන්න.

(iv) $n \in \mathbb{Z}^+$ හා A දී ඇති න්‍යාසය නම්, $A^n = \begin{pmatrix} 1-2n & -4n \\ n & 1+2n \end{pmatrix}$ යන්න $n = 2$ හා $n = 3$ සමග සංගත වන බව පෙන්වන්න.

(v) $(A^n)^{-1}$ පවතින බව පෙන්වා, $(A^n)^{-1}$ ලියන්න. $(3A - 2I)^{-1}$ අපෝහනය කරන්න.

(b) $Z \in C$ වනවිට, $\overline{Z}$ යනු Z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය වේ. $Z = x + iy$ ආකාරයෙන් ගෙන

(i) $Z + \overline{Z} = 2\text{Re}(Z)$

(ii) $Z - \overline{Z} = 2\text{Im}(Z)$

(iii) $Z . \overline{Z} = |Z|^2$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\omega \in C$ වනවිට $\overline{\omega}$ යනු ω හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය වනවිට

$|Z + \omega|^2 - |Z - \overline{\omega}|^2 = 4 \text{ Re } Z . \text{Re } \omega$ බව පෙන්වන්න.

$|Z + \omega|^2 + |Z - \overline{\omega}|^2$ සොයන්න.

(c) ධන නිඛිල n දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර්, ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$Z = \sqrt{3} + i$ යැයි ගනිමු. $\overline{Z}$ යනු Z හි ප්‍රතිබද්ධය නම්, Z හා $\overline{Z}$ යන්න වෙන වෙනම $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $0 \le \theta < 2\pi$ වේ.

$Z^n + \overline{Z}^n = 2^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{6}$ බව පෙන්වන්.

$n = 12$ විට, $\dfrac{Z^n + \overline{Z}^n}{2^n}$ අගයන්න.

14. (a) $f(x)=\dfrac{6x^2-24x+25}{6(x-3)^3}\ ;\ x\neq 3$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x\neq 3$ විට

$$f'(x)=\frac{-2x^2+4x-1}{2(x-3)^4}$$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

$$f''(x)=\frac{2(x^2-2)}{(x-3)^5}\ ,\ x\neq 3$$ විට බව දී ඇත.

$f(x)$ ශ්‍රිතය වැඩිවන අඩුවන පරාස, හැරුම් ලක්ෂය, ස්පර්ශෝන්මුඛ හා නති විවර්තන ලක්ෂය දක්වමින් $y=f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ විට $y=-0.155$ බවද, $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ විට $y=-0.117$ බවද දී ඇත.

(b)

රූපයේ පෙනෙන ආකාරයට මීටර් 6 ක් පළල තහඩුවක් නැවීමෙන් වතුර ගෙන යාමට වැසි පීලිල්ලක් සාදනු ලැබේ. නැවීම් වතුර ධාරිතාවය ගෙන යා හැකි වන අන්දමට පීලිල්ලේ හරස්කඩ වර්ගඵලය උපරිම වන්නේ කවර θ කෝණයක් සඳහා ද? මෙහි $0<\theta\leq \pi/2$ වේ.

උපරිම හරස්කඩ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

15. (i) $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2-3x+2}$ හි භින්න භාග සොයන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{x^2-3x+2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int (\sin^{-1}x)^2\,dx$ සොයන්න.

(iii) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,.\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(iv) එමෙන්ම $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos x+7\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ සොයන්න.

16. (a) $(x_0,\ y_0)$ ලක්ෂයේ සිට, $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

$A\equiv(0,\ 0),\ B\equiv(0,\ 8),\ C\equiv(-9,\ 12)$ ශීර්ෂ වන ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙලින් එක එකක් AB සහ AC පාදවල සිට ඒකක 1 හා 2 දුරවලින් පිහිටන ලක්ෂ හතර සොයන්න. මෙම ලක්ෂ අතුරින් $(-1,\ +3)$ ලක්ෂය ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(b) $(a,\ 0)$ හා $(-a,\ 0)$ $a\neq 0$ වන ලක්ෂ හරහා යන්නාවූත් $lx+my+n=0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නාවූත් වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන්නේ $a^2(2l^2+m^2)=n^2$ නම් බව පෙන්වන්න.

17. (a) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\pi$ සඳහා $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

මෙහි අන්ත ලක්ෂ්‍යය, උපරිම ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වන්න.

(b) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta \equiv \cot\frac{\theta}{2}$, $r \in \mathbb{Z}$ හා $\theta \neq 2r\pi$ වේ. බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{15} + \operatorname{cosec}\frac{8\pi}{15} + \operatorname{cosec}\frac{16\pi}{15} + \operatorname{cosec}\frac{32\pi}{15} = 0$ බව පෙන්වන්න.

(c) θ සඳහා සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

$\sqrt{2}\sec\theta + \tan\theta = 1$

(d) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින නීතිය ප්‍රකාශ කර,

$(b + c - a)\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = 2a\cot\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.