සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි/ All Rights Reserved]

කො/විශාඛා විද්‍යාලය කොළඹ - 05
Co/ Visakha Vidyalaya, Colombo - 05

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය 2022
General Certificate of education (Adv. Level) Examination 2022

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2021 දෙසැම්බර්
Grade 13 - Last Term Test - December 2021

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10 S I

කාලය - පැය 3 යි
Time - 3 hours

Name / Index number ....

A කොටසේ සියලුම ප්‍රශ්න සඳහා පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
එකතුව	

B කොටස

ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
එකතුව	

	ලකුණු
A කොටස	
B කොටස	
එකතුව	

A කොටස

(1) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $5^n - 4^n - 1$ යන්න 4 හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

(2) එකම රූප සටහනක $y = \frac{1}{2}|x-1|$ හා $y = |x| - 1$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x - \frac{1}{2}| > |2x| - 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියළුම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

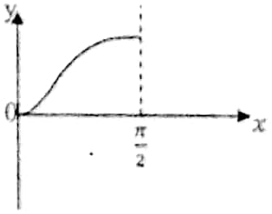
(3) $|Z + 3i + 2| = 1$ වන පරිදි වූ Z හි පථය ආගන්ඩ් සටහනක ඇඳ දක්වන්න. එමඟින් $|Z - 2|$ ට ගතහැකි අඩුතම අගයත් වැඩිතම අගයත් සොයන්න.

(4) $\lim_{x \to \pi} \frac{(1+\cos^3 x)(\sqrt{3x} - \sqrt{3\pi})}{\sin^3 x} = \frac{-3\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(5) $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\left(6 + \frac{2}{x}\right)(1 + x)^n$ ප්‍රසාරණයේ x^{n-1} හි සංගුණකය 24 වේ නම් n හි අගය සොයන්න.

(6) රූපයේ දැක්වා ඇති $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ වක්‍රයෙන් හා x අක්ෂයෙන් ද $x = \frac{\pi}{2}$ රේඛාවෙන්ද ආවෘත ප්‍රදේශය x අක්ෂය වටා රේඩියන් 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.



Scanned with CamScanner

(7) $xy = 16$ බහුවලයට එය මත පළමු වෘත්ත පාදකයෙහි වූ $P \equiv \left(4t, \frac{4}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $t^3x - ty - 4(t^4 - 1) = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි. මෙම අභිලම්බය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යමින් නැවතත් Q හිදී බහුවලය හමුවේ නම් Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(8) l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y - 1 = 0$ හා $3x + 4y - 2 = 0$ සරල රේඛා දෙකක් යැයි ගනිමු. A හා B ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක දෙකක් වන පරිදි නම් A හා B හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(9) $P \equiv (-3, 2)$ ලක්ෂ්‍ය $S \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$S \equiv 0$ වෘත්තය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(10) $cosec\theta + cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$ බව පෙන්වා එමගින්

$cosec\,\frac{\pi}{15} + cosec\frac{2\pi}{15} + cosec\frac{4\pi}{15} + cosec\frac{8\pi}{15} = 2cosec\frac{\pi}{15}$ බව අපෝහනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

විශාඛා විද්‍යාලය , කොළඹ 5

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2021 දෙසැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය - I

B කොටස

❖ ප්‍රශ්න පහකට පිළිතුරු සපයන්න.

(11) (a) $f(x) = x^2 + (\lambda + 7)x + \lambda$ යැයි ගනිමු. $\lambda \in R$ සඳහා $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල දෙකෙහි අන්තරය අවම වන විට λ හි අගය සොයන්න.

එමඟින් $f(x) = 0$ හි මූල දෙකෙහි අවම අන්තරය ලබා ගන්න.

λ ඉහත අගය ගත්තා විට

(i) $\frac{2}{f(x)}$ වැඩිතම අගය සොයා එය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය සොයන්න

(ii) α සහ β යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $\alpha^4 - 1$ සහ $\beta^4 - 1$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න

(b) $f(x) = x^4 + \lambda x^3 - x^2 + \mu x + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි λ, μ තාත්වික නියතවේ.

$(x - 1)$ සහ $(x + 2)$ යනු $f(x)$ හි සාධක නම් λ සහ μ හි අගයයන් සොයන්න. ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $f(x)$ සාධක ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. තවද $f(x)$ බහුපදය $(x^2 - 1)$ න් බෙදූවිට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

(12) (a) පන්තියක සිසුන් 25 ක් සමාන කණ්ඩායම් පහකට වෙන් කළ හැකි ආකාර ගණන $\frac{25!}{(5!)^6}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත එක් එක් කණ්ඩායම නියෝජනය වන පරිදි විශේෂ ව්‍යාපෘතියක් සඳහා සිසුන් 6 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන ගණනය කරන්න. ඔවුන් පේළියට වාඩි කරවීමේදී එකම කණ්ඩායමක දෙදෙනෙකු එකට සිටිය නොහැකි වන සේ සිදුකළ යුතු නම් වාඩි කළ හැකි ආකාර ගණන ද ගණනය කරන්න.

(b) සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r + 3 = A(r+1)(r+2) + Br(r+2) + cr(r+1)$ වන පරිදි A, B හා C හි අගයයන් සොයන්න.

ඒ නයින්

$U_r = \frac{r+3}{3^r\, r(r+1)(r+2)}$ නම් $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(x)$ සොයන්න.

තවද $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)3^n} + \frac{1}{2(n+2)3^n}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

තවද $3\sum_{r=3}^{\infty} U_{r-1}$ හි අගය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(13) (a) $A = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ වේ. $C = AB$ වන පරිදි C න්‍යාසය සොයා C^{-1} ලියා දක්වන්න.

$CDC^{-1} = 2C^2 + 3C$ වන පරිදි D න්‍යාසය සොයන්න.

$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න. තවද ගුණිත න්‍යාසය $P = BA$ සොයන්න.

$X = \begin{pmatrix}a\\ 2\\ b\end{pmatrix}$ මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$PX = \begin{pmatrix}4\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$ වන පරිදි a සහ b සොයන්න.

(b) $Z = Cos\theta + iSin\theta$ යැයි ගනිමු. මෙහි $0 < \theta < 2\pi$ වේ.

(i) $|1 - Z| = 2Sin\frac{\theta}{2}$ බවද

(ii) $\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ හි තාත්වික සහ අතාත්වික කොටසද සොයන්න.

(iii) $R_e\left(\frac{Z}{1-Z}\right) = \frac{-1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $Z = \frac{8\sqrt{3}-4i}{7+\sqrt{3}i}$ යැයි ගනිමු. $Z = r(Cos\theta + iSin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. ද මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන් $Z^{12} + \bar{Z}^{12} = 8192$ බව පෙන්වන්න.

(14) (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ සොයන්න. ඒනයින් $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

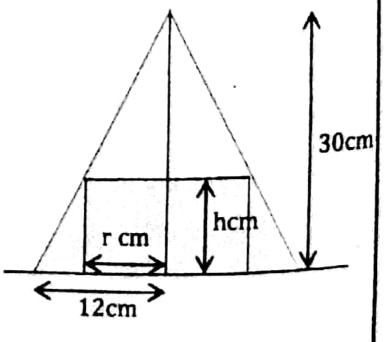
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 1$ සඳහා $f''(x) = \frac{2x+4}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ හි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) රූපයේ දැක්වෙන්නේ තිරස් තලයක් මත තැබූ උස 30cm ක් හා ආධාරකයේ අරය 12cm වූ කුහර කේතුවක් තුළ අන්තර්ගත කරන ලද උස h cm හා අරය r cm වූ ඝන සිලින්ඩරයකි. සිලින්ඩරයේ ඉහළ වෘත්තාකාර දාරය කේතුව හා ස්පර්ශ වෙමින් පවතී.



(i) සිලින්ඩරයේ පරිමාව $v = \pi\left(30r^2 - \frac{5}{2}r^3\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) කේතුව තුළ පිහිටිය හැකි විශාලතම සිලින්ඩරයේ පරිමාව සොයා එම අවස්ථාවේදී සිලින්ඩරයේ පරිමාව කේතුවේ පරිමාවෙන් $\frac{4}{9}$ ක් බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(15) (a) $0 < |x| < a$ සඳහා $f(x) = \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$ ලෙස දී ඇතිවිට $f'(x) = \frac{-a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ බව පෙන්වා

$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ සොයන්න.

එනයින් හෝ අන්‍යාකාරයකින් $\int_0^2 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{21-4x-x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5+\sqrt{21}}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(b) $1 < t$ වන විට $I = \int_1^t x\cos(\ln x)dx$ ද

$J = \int_1^t x\sin(\ln x)dx$ ද ලෙස ගනිමු.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්

$2I - J = t^2\cos(\ln t) - 1$ හා $I + 2J = t^2\sin(\ln t)$ බව පෙන්වන්න.

එමගින් I හා J සොයන්න.

වෙනත් ක්‍රම ඇසුරින්

c) $\int \frac{dx}{x^4-81}$ අගයන්න.

(16) $(1,6)$ සහ $(-2,15)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක යාකරන $l = 0$ සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

$x + 3y - 5 = 0$ සහ $x - y + 3 = 0$ සරල රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නොසොයා ඒ හරහා යමින්

$l = 0$ රේඛාවට ලම්බව පිහිටන $l_1 = 0$ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

$l_1 = 0$ සහ $y = 4$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන P හි ඛණ්ඩාංකය සොයන්න.

P කේන්ද්‍රය වන පරිදි $x - y + 3 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශවන $S = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

එනයින් $l_1 = 0$ රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටන පරිදි $l_1 = 0$ හා $l = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා

යමින් $S = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේදන කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

(17) (a) $f(x) = \frac{1}{4}Cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{8}Sinx$ ලෙස දී ඇත.

(i) $f(x) = R\cos(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි R හා α නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

(මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.)

(ii) $f(x)$ හි අවම අගය හා උපරිම අගය සොයන්න.

(iii) $f(x) = -\frac{7}{16}$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය හා කොසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන් $\cos\theta = \frac{a-b}{c}$ වන පරිදි θ ධන කෝණයක් අර්ථ දක්වා ඇත.

$\cos\theta = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ බව පෙන්වා, එනයින්

(i) $\cos\frac{A-B}{2} = \frac{(a+b)\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$

(ii) $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{C\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$ බව පෙන්වා

ඉහත (i) හා (ii) ඇසුරින් $\frac{\cos A+\cos B}{\cos c} = \frac{C(a+b)\sin^2\theta}{a^2+b^2-c^2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

Scanned with CamScanner

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

කො/විශාඛා විද්‍යාලය, කොළඹ - 05

Co / Visakha Vidyalaya, Colombo - 05

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය 2021

General Certificate of education (Adv. Level) Examination 2021

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2021

Grade 13 - Last Term Test - 2021

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Mathematics II

10 S II

කාලය පැය 03 යි.
Three hours

Name / Index number ....

A කොටසේ සියලු ම ප්‍රශ්න සඳහා පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
එකතුව	

B කොටස

ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
එකතුව	

	ලකුණු
A කොටස	
B කොටස	
එකතුව	

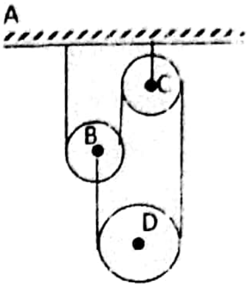
A කොටස

(1) ස්කන්ධය 2m හා 3m වූ P හා Q අංශු දෙකක් සුමට තිරස් තලයක් මත පිළිවෙලින් 3u හා 2u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වී සරලව ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු අංශු දෙක එකිනෙකින් ඉවතට චලනය වන අතර එවිට Q හි වේගය U වේ. ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගත සංගුණකය $\frac{1}{2}$ බව පෙන්වා ගැටුමෙන් P අංශුවේ චාලක ශක්තිය $\frac{27mu^2}{4}$ හානි වූ බව පෙන්වන්න.

(2) අරය a වූ දාරය තිරස් වන සේ දෘඪව සවිකළ සුමට තහඩුවක පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිටින කුඩා ගෙම්බෙකු සිය උපරිම ප්‍රවේගයෙන් දාරය මත ලක්ෂ්‍යයකට පනී. ඌට ඒ සඳහා එල්ල කළ හැකි කෝණ දෙක තිරසට α හා β නම් $\tan(\alpha + \beta) = -1$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(3) රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි අවල A ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තුවක ස්කන්ධය 2m වන B සුමට සවල කප්පිය වටා යටින්
C මඟින් දමා, 2m ● යටින් දමා
දමා ^ කෙළවර B කප්පියට සවිකර ඇත. පද්ධතිය නිසලතාවයෙන් මුදාහල විට B හා D හි ත්වරණ අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගන්න. තවද තන්තුවේ ආතතිය ගණනය කරන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) ස්කන්ධය M kg වූ මෝටර් රථයක් එහි එන්ජිම H KW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වන විට එහි උපරිම වේගය U ms^{-1} වේ. මෙහි රථය එම ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරමින් තිරස්ව ආනතිය θ වූ මාර්ගයක ඉහළට ධාවනය වන විට එහි උපරිම වේගය V ms^{-1} වේ. සියලු අවස්ථාවන්හිදී චලිත ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී නම් $H=\dfrac{MguV\sin\theta}{(U-V)\times10^{3}}$ මඟින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

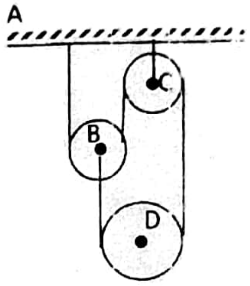
....

....

....

Scanned with CamScanner

(3) රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තුවක ස්කන්ධය 2m වන B සුමට සචල කප්පිය වටා යටින් දමා (C මගින් දමා, 2m යටින් දමා) කෙළවර B කප්පියට සවිකර ඇත. පද්ධතිය නිසලතාවයෙන් මුදාහල විට B හා D හි ත්වරණ අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගන්න. තවද තන්තුවේ ආතතිය ගණනය කරන්න.



(4) ස්කන්ධය M kg වූ මෝටර් රථයක් එහි එන්ජිම H KW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වන විට එහි උපරිම වේගය U ms^{-1} වේ. මෙහි රථය එම ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරමින් තිරස්ව ආනතිය θ වූ මාර්ගයක ඉහළට ධාවනය වන විට එහි උපරිම වේගය V ms^{-1} වේ. සියලු අවස්ථාවන්හිදී චලිත ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී නම් $H=\frac{MguV \sin\theta}{(U-V)\times 10^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(5) 3m හා m ස්කන්ධ සහිත, P හා Q අංශු දෙකක් අචල සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. P අංශුව තිරස් ගෙබිමක් මත ස්පර්ශවද Q අංශුව එල්ලෙමින්ද තන්තුව තදව පවතින පරිදි පද්ධතිය නිසලව පවතියි. නිසලතාවයේ සිට h උසක සිට සිරස්ව වැටෙන ස්කන්ධය m වන වෙනත් අංශුවක් Q සමඟ ගැටී බද්ධ වෙයි. අනතුරුව මුළු පද්ධතියම V වේගයක් සහිතව චලිතවේ. V හි අගය සොයා තන්තුව තුළ හට ගන්නා ආවේගය $\frac{3}{5}mu$ බව පෙන්වන්න.

$u = \sqrt{2gh}$ වේ.

(6) O මූලය අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $-2\underline{i} + 5\underline{j}$, $10\underline{i} - \underline{j}$ සහ $\lambda(2\underline{i} + \underline{j})$ වේ. C ලක්ෂ්‍යය AB මත පිහිටයි නම් λ හි අගය සොයන්න.

$\overline{AO} . \overline{OC}$ සොයා එමගින් $A\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{145}})$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(7) ගැට්ට තිරස් ලෙස සවිකරන ලද අරය r වූ සුමට කුහර අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් තුළ දිග 3r වූ AB දණ්ඩක් සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A කෙළවර පාත්‍රය තුළ ද B කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පිහිටන පරිද්දෙනි. අර්ධ ගෝලය කපාගත් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයේ දණ්ඩ සමතුලිතව පිහිටන්නේ තිරසට α කෝණයකින් ආනතව නම් $\tan 2\alpha = 3\cos\alpha$ බව පෙන්වන්න.

(8) බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියකට ස්පර්ශව සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී. එය ආධාර කරනු ලැබ ඇත්තේ B අනෙක් කෙළවර, A ට සිරස්ව ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කෙරෙන සමාන $2a$ දිගින් යුත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. දණ්ඩ උඩු සිරසට θ කෝණයකින් ආනත වන අතර එය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි. බිත්තිය හා දණ්ඩ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ හි අගය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(9) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් $P(B) = \frac{3}{4}$ $P(A/B) = \frac{1}{4}$ හා $P(A \cup B) = \frac{11}{36}$ බව දී ඇත. P(A) සොයන්න. A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත නොවන බව පෙන්වන්න.

(10) 2, 3, 6, 9 යන සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාවය සොයන්න.
මෙම සංඛ්‍යාවලට x හා y සංඛ්‍යා දෙක එකතු කළවිට මධ්‍යන්‍යය 1 කින් වැඩි වන අතර විචලතාවය 2.5 කින් වැඩි වන්නේ නම් x හා y සොයන්න.

විශාඛා විද්‍යාලය , කොළඹ 5

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2021 දෙසැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය - II

B කොටස

❖ ප්‍රශ්න පහකට පිළිතුරු සපයන්න.

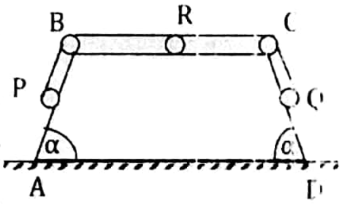
(11) (a) A හා B යනු තිරස් රළු බිමක් මත AB = a වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. අංශු2ක් පිළිවෙලින් A හා B සිට 3u හා 7u ප්‍රවේගවලින් AB ඔස්සේ එකිනෙක වෙත එකවිට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. එක් එක් අංශුවත් බිමත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. අංශු දෙකේ චලිත සඳහා එකම අක්ෂ මත ප්‍රවේග -කාල ප්‍රස්තාර ඇඳ එමගින්

(i) $u^2 > \frac{a\mu g}{29}$ නම් අංශුන් දෙක ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

(ii) අංශුන් නිසලතාවයට පැමිණීමට පෙර ගැටේ නම්ද $u^2 = \frac{a\mu g}{9}$ ද ගැටීමට ගතවන කාලය $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$ බවද ගැටෙන ස්ථානයට A සිට දුර $\frac{5a}{18}$ බවද පෙන්වන්න.

(b) තිරස් මාර්ගයක් හා සිරස් රේඛාවක් O හිදී එකිනෙක ඡේදනය වේ. A මෝටර් රථයක් $\sqrt{3}U$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස් මාර්ගය දිගේ O දෙසට චලනය වේ. B බැලුනයක් U ප්‍රවේගයෙන් සිරස් රේඛාව දිගේ පහළට O දෙසට චලනය වේ. B බැලුනයක් U ප්‍රවේගයෙන් සිරස් රේඛාව දිගේ පහළට O දෙසට චලිත වේ. t = 0 මොහොතේ O සිට a දුරින් A හා B පිහිටයි නම් ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ ඇඳීම මගින් A සහ B අතර ඇතිවන කෙටිම දුර $(\sqrt{3} - 1)\frac{a}{2}$ බව පෙන්වා කෙටිම දුර ඇතිවීමට ගතවන කාලය ගණනය කරන්න.

(12) (a) ස්කන්ධය 4m වූ ලී කුට්ටියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන හරස්කඩ ABCD වේ. B හා C ශීර්ෂවල කුඩා කප්පි සවිකර ඇති අතර AD ඔස්සේ යන මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB හා CD යනු අදාල මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා යැයි ද $B\hat{A}D = C\hat{D}A = \alpha$ යැයි දී ඇත. ස්කන්ධය පිළිවෙලින් m හා 3m වන P හා Q අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇති අතර ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක් තන්තුවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට අමුණා ඇත.



තන්තුව B හා C හි කප්පි මතින් යන අතර P, Q හා R අංශු පිළිවෙලින් AB, CD හා BC මත රූප සටහනේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නොබුරුල් වන සේ තබා ඇත. මෙහි AB ඔස්සේ යන මුහුණත රළුවන අතර අංශුව හා එම පෘෂ්ඨය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P, Q, R අංශුවල ත්වරණය

$$\frac{5(2\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}{(8+2\mu\sin 2\alpha + \mu\sin\alpha - 8\cos\alpha)}$$ බව පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m හා 2m වූ A හා B සුමට මුදු දෙකක් සිරස් සුමට කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තාකාර කම්බියක් දිගේ ස්ර්පණ විය හැකි ආකාරයට අමුණා ඇත. AB කේන්ද්‍රයේ 60° ක කෝණයක් ආපාතනය කරන අතර තන්තුව ඇදී පවතින පරිදි A හා B එකම තිරස් මට්ටමේ O ට ඉහළින් තබා නිසලතාවයෙන් පද්ධතිය මුදාහරිනු ලැබේ.

තන්තුව තිරසට ආනතිය θ වන විට,

$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{3a}(3\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + 3\sqrt{3})$ බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය ගණනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

(13) $KO = 14a$ වන පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත K, L, M, N හා O ලක්ෂ්‍ය සරල රේඛියව පිහිටා ඇත්තේ $KL = 8a$, $LM = a$; $MN = 3a$ හා $NO = 2a$ වන පරිදිය. ස්වාභාවික දිග $14a$ වන ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් K හා O ලක්ෂ්‍ය දෙකට සම්බන්ධිත ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් K සිට $9a$ දුරින් වූ M හිදී තන්තුවට සම්බන්ධ කර ඇත. දැන් P අංශුව KO දිගේ N ලක්ෂ්‍ය ඇද නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරියි. P අංශුව KO දිගේ K සිට x $(9a \le x \le 12a)$ දුරින් පිහිටන විට, චලිත සමීකරණ ලියා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} + \frac{2g}{9a}(x - 9a) = 0$ බව පෙන්වන්න.

$X = x - 9a$ ආදේශයෙන් $\ddot{X} + \frac{2g}{9a} X = 0$ බව පෙන්වා සරල අනුවර්ති චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය ලබාගන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම

$X = A\cos wt + B\sin wt$ ආකාරය යැයි උපකල්පනය කර A_1, B_1 හා W_1 සොයන්න.

එනයින් P අංශුව $\sqrt{2g\,a}$ වේගයෙන් $t_0 = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2g}}$ කාලයකදී M ට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

$8a \le x \le 9a$ සඳහා P අංශුවේ චලිතය සඳහා සරල අනුවර්ති චලිතයේ ලාක්ෂණික සමීකරණය $\ddot{y} = \frac{-2g}{5a} y$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $y = x - 9a$ වේ.

එම සමීකරණයේ විසඳුම

$y = A_2 \cos w_2 (t - t_0) + B_2 sin w_2 (t - t_0)$ ආකාරයෙන් යැයි උපකල්පනය කර A_2, B_2 හා w_2 සොයන්න.

එමගින් P අංශුවට N සිට L දක්වා යාමට ගතවන මුළු කාලය $\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\frac{3\pi}{2} + \sqrt{5}\, sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ බව පෙන්වන්න.

(14) (a) O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $5\underline{a}$ හා $8\underline{b}$ වේ.

$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OY} = \beta\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිළිවෙළින් OA හා OB මත X හා Y පිහිටයි.

$BP : PX = 2 : 3$ හා $AP : PY = 3 : 1$ වන පරිදි BX හා AY රේඛා P හිදී ඡේදනය වේ.

(i) $\overrightarrow{OP} = 2\lambda\underline{a} + \frac{3}{5}\underline{b}$ බව පෙන්වන μ, $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් $\overrightarrow{OP}$ සඳහා තවත් ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.
$\frac{24}{5}\underline{b}$

(ii) එමගින් $\lambda = \frac{5}{8}$ හා $\mu = \frac{1}{10}$ බව පෙන්වන්න.
$\mu = \frac{4}{5}$

(iii) $\overrightarrow{OP}$ සහ $\overrightarrow{XY}$ එකිනෙකට ලම්බ වේ නම් $\cos(A\hat{O}B) = \dfrac{\frac{96}{35}|b|^2 - \frac{25}{28}|a|^2}{|a|\,|b|}$ ~~බව පෙන්වන්න.~~
සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(b) ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රයක කේන්ද්‍රය O වන අතර පැත්තක දිග $2a$ සහ DE පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වේ. O මූලය හා x - අක්ෂය OC දිගේද, y - අක්ෂය OM දිගේද වන පරිදි බල පද්ධතියක් හා ඒවායේ ක්‍රියා ලක්ෂ්‍ය සුපුරුදු අංකනයෙන් පහත වගුවේ දැක්වේ.

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$-a\mathbf{i}-\sqrt{3}a\mathbf{j}$	2Pi
B	$a\mathbf{i}-\sqrt{3}a\,\mathbf{j}$	$P\mathbf{i}+\sqrt{3}\,P\mathbf{j}$
C	$2a\,\mathbf{i}$	$-\lambda P\mathbf{i}+\sqrt{3}\lambda p\mathbf{j}$
D	$a\mathbf{i}+\sqrt{3}a\,\mathbf{j}$	~~λpj~~ λpi

බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය C හරහා ගමන් කරයි නම් $\lambda=2$ බව පෙන්වන්න.

සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයා එය BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බව පෙන්වන්න.

O වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය $6\sqrt{3}$ Pa වාමාවර්ත බව පෙන්වන්න.

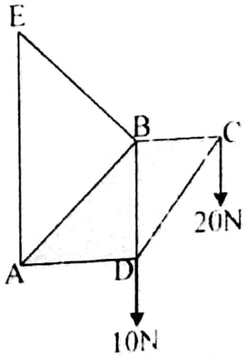
දැන් $12\sqrt{3}$ Pa ඝූර්ණය සහිත දක්ෂිණාවර්ත යුග්මයක් පද්ධතියට යොදයි. නව සම්ප්‍රයුක්තයේ පිහිටීම සොයා, එහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $y=\sqrt{3}\,x+2\sqrt{3a}$ බව පෙන්වන්න.

(15) (a) එක එකක දිග $2a$ හා බර w වූ AB, AC ඒකාකාර දඬු දෙකක් හා බර w_1 වූ තුන්වන ඒකාකාර දණ්ඩක් ABC ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන සේ ඒවායේ කෙළවරවල් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. මෙවිට $B\hat{A}C=2\theta$ වේ. B ශීර්ෂය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර BC තිරස්ව ද BC ට පහළින් A පිහිටන පරිදි ද ත්‍රිකෝණය සිරස් තලයක එල්ලෙමින් සමතුලිතතාවයේ පවතිනුයේ AB දණ්ඩට යෙදූ බල යුග්මය මගිනි.

(i) ඉහත බල යුග්මයේ විශාලත්වය හා දිශාවත්

(ii) A හා C හි ප්‍රතික්‍රියාවල තිරස් හා සිරස් සංරචකත් සොයන්න.

(b) රූපයේ දැක්වෙනුයේ සැහැල්ලු දඬු හතකින් සෑදි රාමු සැකිල්ලකි. රාමු සැකිල්ල A හා E හිදී සිරස් බිත්තියකට සවිකර D හා C හිදී පිළිවෙළින් 10N හා 20N භාර එල්ලීමෙන් සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත. මෙහි BC = BD = AD ද, DC=AB =BE ද AE හා BD එකිනෙකට සමාන්තර ද AE දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය ශුන්‍ය ද වේ නම් බෝ අංකනය මගින් ප්‍රත්‍යාබල රූපසටහනක් ඇඳීම මගින AB, BC, CD, BD, BE දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා එනයින් A හා E හි ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

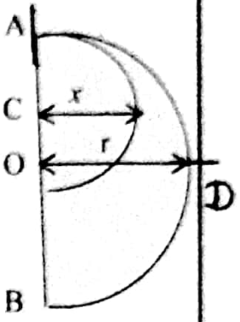


Scanned with CamScanner

(16) අර්ධ වෘත්ත චාපයක හැඩය ගන්නා සිහින් ඒකාකාර කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනය භාවිතයෙන් සොයන්න.

එනයින්

ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.



ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක විෂ්කම්භය AB වේ. එහි කේන්ද්‍රය O වන අරය r වේ. C යනු A හි සිට $x(< r)$ දුරින් AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. කේන්ද්‍රය C ද අරය x ද වූ අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තර කොටසක් මුල් ආස්තරයෙන් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉතිරි කොටසෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G නම්

$$G \equiv \left[\frac{4(r^2+xr+x^2)}{3\pi(r+x)}, \frac{-x^2}{r+x}\right]$$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි OD හරහා යන රේඛාව X අක්ෂය ලෙසද OA හරහා යන රේඛාව Y අක්ෂය ලෙසද සලකන්න

x විචලනය වන විට G හි පථය සරල රේඛාවක් බවද සාධනය කරන්න.

(17) (a) මල්ලක එකසමාන නිල් පාට බෝල 3 ක් ද රතුපාට බෝල 4 ක් ද කොළ පාට බෝල 3 ක් ද අඩංගු වේ. සසම්භාවී ලෙස බෝල 3 ක් ප්‍රතිස්ථාපන රහිතව මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) බෝල තුනම කොළ පාට වීමේ

(ii) බෝල තුනම එකම පාට බව දුන්විට බෝල තුනම කොළපාට වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

තෝරාගන්නා ලද දෙවන බෝලය තවත් මල්ලකට දමනු ලැබේ. එම මල්ලේද එක සමාන නිල් බෝල 2 ක් ද එක් රතු බෝලයක් ද, කොළපාට බෝල දෙකක් ද අඩංගු වේ නම් එම දෙවන මල්ලෙන් සසම්භාවීව තෝරන බෝලය කොළපාට බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) පහත දැක්වෙන වගුව එක්තරා රටක නගරවල් 100 ක එක්තරා දවසක දැක්වෙන උෂ්ණත්වයන් හි සඳහන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි. උෂ්ණත්වය සෙල්සියස් අංශකවලින් දැක්වේ.

උෂ්ණත්වය (t°C)	**සංඛ්‍යාතය**
20-29	01
30-39	09
40-49	35
50-59	40
60-69	12
70-79	03

(i) මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මාතය සහ විචලතාවය සොයන්න.

(ii) සත්‍ය උෂ්ණත්වයට වඩා 3°C ක වැඩි උෂ්ණත්ව සඳහන් වන බව පසුව සොයා ගන්නා ලදී. සත්‍ය උෂ්ණත්වයන්හි මධ්‍යන්‍යය, මාතය සහ විචලතාවය ගණනය කරන්න.

(iii) මධ්‍යන්‍යය 58 °Cක් වූ තවත් කියවීම් 50 ක් ඉහත ව්‍යාප්තියට එකතු කලේ නම් එම ව්‍යාප්තියේ සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය ගණනය කරන්න.

Scanned with CamScanner