අත්තානං දමයන්ති
පණ්ඩිතා

Scanned with CamScanner

තෙවන වාර පරීක්ෂණය - 2020
Third Term Test - 2020

සංයුක්ත ගණිතය I Combined Maths I	13 ශ්‍රේණිය Grade 13	පැය 03 Three Hours අමතර කියවීම් කාලය මි.10 යි

- ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න

A කොටස

01. ගණිත අභ්‍යුහණ මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව සාධනය කරන්න.

02. $x^2 - 4 \geq |x-2|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්වික අගයන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

03. ආගන්ඩ් සටහනක $\text{Arg}\left(z+1-\sqrt{3}\,i\right)= -\pi/6$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළසටහනක් අඳින්න. එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\text{Arg}\left(z+1-\sqrt{3}\,i\right)= -\pi/6$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.

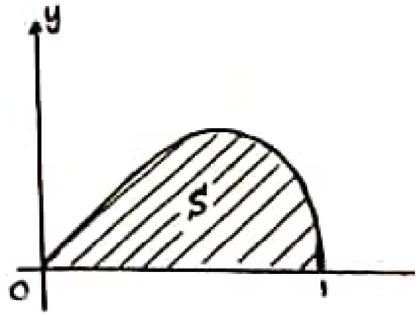
04. a සහ b යනු නිශ්ශූන්‍ය තාත්වික සංඛ්‍යාවන විට $(a-b)^n$ ප්‍රසාරණයෙහි 4 වන සහ 5 වන පදවල ඓක්‍යය ශූන්‍ය වේ.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{8(n-2)}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

05. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(1-\cos 6x)}{x^3(3\sin x - 4\sin^3 x)} = 3$ බව පෙන්වන්න.

06. රූපයේ දැක්වෙන්නේ $Y = x\sqrt{1-x^2}$ ශ්‍රිතයෙහි දළ ප්‍රස්ථාරයේ පළමු වෘතපාදය තුළ පිහිටි කොටසයි. එ
වක්‍රයෙන් ද, x අක්ෂයෙන් ද ආවෘත වන S වර්ගඵලය x අක්ෂය වට රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කිරීමෙ
ජනනය වන ඝනවස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{2\pi}{15}$ බව පෙන්වන්න.



Scanned with CamScanner

07. t යනු තාත්වික පරාමිතියක් වන විට C වක්‍රයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යක ඛණ්ඩාංක $x = a(2\cos t - \cos 2t)$ සහ $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ මගින් දෙනු ලැබේ. වක්‍රය මත වූ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $\tan\left(\frac{3t}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $t = \frac{\pi}{2}$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x + y - 3a = 0$ බව පෙන්වන්න.

තවද $t = \frac{\pi}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය x - අක්ෂයට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

08. λ යනු නිශ්ශූන්‍ය තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට $3\lambda x - 2y + 1 = 0$ සහ $\lambda x + 2y + 3 = 0$ යන සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍යය හා $(1,1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන සරල රේඛාව $2y - x + 5 = 0$ සරල රේඛාවට ලම්බකවීම සඳහා λ ට ගතහැකි අගය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

09. $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 12 = 0$ වෘත්තය හා $4x + 3y + q = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශවීම සඳහා q ට ගතහැකි අගයයන් සොයන්න.

10. $0 \leq \alpha, \beta \leq 90^{\circ}$ සහ $\tan(\alpha + \beta) = 3$ සහ $\tan(\alpha - \beta) = 2$ නම්, $\operatorname{cosec} 2\alpha = \sqrt{2}$ වන බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

<u>B කොටස</u>

- ප්‍රශ්න 05 කට පිළිතුරු සපයන්න.

11. (i) $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. මෙහි b හා c නිශ්ශුන්‍ය තාත්වික නියත වේ. α^3 හා β^3 මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

$b^3-6b+9=0$ හා C=2 නම් α හා β හි තාත්වික අගයන් සොයන්න.

එනයින් $y^3-6y+9=0$ හි තාත්වික මූලය අපෝහනය කරන්න.

(ii) $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1$ නම් $ax+by=1$ හා $cx^2+dy^2=1$ යන සමීකරණ දෙක භාවිතයෙන් $(a^2d+b^2c)x^2-2adx+d-b^2=0$ බව ලබා ගන්න.

මෙම වර්ගජ සමීකරණයෙහි මූල සමාන වන්නේ $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1$ නම් පමණක් වන බව පෙන්වන්න.

(iii) $f(x)$ නමැති වර්ගජ බහුපදයක් පිළිවෙලින් (2x+1), (3x+1) හා (4x+1) යන්නෙන් බෙදූවිට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 2,3 හා 4 වේ. එම වර්ගජ බහුපදය නොසොයා (2x+1),(3x+1) හා (4x+1) යනු g(x)=xf(x)+1 මගින් දෙනු ලබන g(x) බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් g(x) බහුපදය ලියා දක්වන්න.

12.(a)(i) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 යන සංඛ්‍යාංක අතරින් එකම අංකය නැවත වරක් නොසිටින සේ අංක 4 ක් සහිත සංඛ්‍යා කීයක් සෑදිය හැකිද?

ඒ නයින් 4000 ට වඩා අඩු සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් තිබේද?

(ii) ඉහත දෙන ලද සංඛ්‍යාංක අතරින් එකම අංකය නැවත වරක් නොසිටින සේ අංක ඕනෑම ප්‍රමාණයක් යොදා ගනිමින් සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන කොපමණද?

(b) $r\in z^+$ සඳහා $u_r=\frac{2r+3}{r(r+1)}\cdot\frac{1}{3^r}$ යනු ශ්‍රේණියක r වන පදයයි.

$u_r=v_r-v_{r+1}$ වන පරිදි $v_r=\frac{1}{r3^{(r-1)}}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n}u_r=1-\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$ බව පෙන්වන්න.

තවද $r\in z^+$ සඳහා තවත් ශ්‍රේණියක r වන පදය $w_r=r(r+1)$ බව දී ඇත. $f(r)=\frac{1}{3}r(r+1)(r+2)$ නම්

$w_r=f(r)-f(r-1)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n}w_r$ සොයන්න.

තවද $\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බවත්,

Scanned with CamScanner

$\sum_{r=1}^{\infty} w_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බවත් පෙන්වන්න.

එනයින් $a_r = \dfrac{r^2(r+1)^2 3^r + 2r + 3}{r(r+1)3^r}$ යන්නෙන් දෙනු ලබන r වන පදය a_r වන ශ්‍රේණියේ පළමු පද n හි ඓක්‍යය අපෝහනය කරන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $f(x) = x^2 - 4x + 7$ යැයි ගනිමු.

(i) $F(A) = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) එම ප්‍රතිඵලය නැවත නැවත යෙදීමෙන් $A^5 + 31A + 56I_2 = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි I_2 යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වෙයි. ඒ නයින් A^5 සොයන්න.

F(A)=0 භාවිතයෙන් A^{-1} සොයන්න.

(iii) A^{-1} ලබාගෙන ඒනයින්

$2x+3y=8$

$-x+2y=3$ සමගාමී සමීකරණ යුගලය විසඳන්න.

(b) $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස ගනිමු.

$Z + \bar{Z}$ සහ $Z\bar{Z}$ වල අගයයන් සොයන්න.

$|Z|^2 = Z\bar{Z}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හා ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් පමණක් $\left|\dfrac{1}{1+Z}\right| = \dfrac{1}{2}\sec(\theta/2)$ බව පෙන්වන්න.

තවද 1+Z සළකා එමගින් Arg(1+Z)= θ_1 බව ලබා ගන්න.

එනයින් $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{1+Z}\right)$ සොයා $\dfrac{1}{1+Z} = \dfrac{1}{2} - i\left[\dfrac{1}{2}\tan\left(\theta/2\right)\right]$ බව පෙන්වන්න.

(c) $Z = \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5}$ වේ.

දමුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $Z = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\theta = \dfrac{\pi}{729}$ විට $Z^{27} + \bar{Z}^{27} = \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

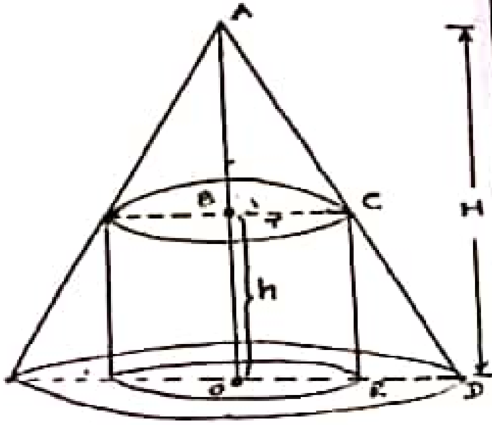
14. (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$x \neq 1$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{4(x+2)}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත. මෙහි $f'(x)$ හා $f''(x)$ ට සුපුරුදු තේරුම් ඇත.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂය හා නතිවර්තන ලක්ෂය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) ආධාරකයේ අරය R සහ උස H වූ ඝන කේතුවකින් එම කේතුවේ අක්ෂය, අක්ෂය ලෙස පිහිටන පරිදි රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට ඝණ සිලින්ඩරයක් කපාගත යුතුව ඇත්තේ සිලින්ඩරයේ පරිමාව උපරිම වනපරිදිය. සිලින්ඩරයේ උස h නම් $h = \left(1 - \frac{r}{R}\right)H$ බව පෙන්වන්න. මෙහි r යනු සිලින්ඩරයේ ආධාරකයේ අරයයි. සිලින්ඩරයේ පරිමාව V නම් $V = \pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ බව ලබා ගන්න.



සිලින්ඩරයේ උපරිම පරිමාව සොයා එම පරිමාව උපරිම වන විට $\dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{3}$ බවත්, එවිට සිලින්ඩරයේ උස $\dfrac{1}{3}H$ බවත් පෙන්වන්න.

15. (a) $\dfrac{t^2-3}{(t-1)(t^2+1)}$ යන්න භින්න භාග වලට වෙන් කරන්න.

එනයින් සහ සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්

$$\int_0^{\pi/6} \frac{(\sin^2 x - 3)\cos x}{(\sin x - 1)(1+\sin^2 x)}\,dx = l_n(5) + 2\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int x^3(\ln x)^3\,dx$ සොයන්න.

(c) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

16. (a) $3x+4y-24=0$ සරල රේඛාවට y අක්ෂය A දී ද, x අක්ෂය B හිදී ද හමුවෙයි. (0,-1) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූද, x අක්ෂයට සමාන්තර වූ ද, රේඛාවට AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය C හි දී හමුවේ. ACB යනු සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න. ACBD සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය සොයන්න.

(b) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තය සහ $x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය වීම සඳහා ඉටුවිය යුතු අවශ්‍යතාවය

$2gg^1+2ff^1=C+C^1$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2+2x+4y+3=0$, $x^2+y^2+3x+5y=0$ සහ $x^2+y^2+4x+5y-1=0$ යන වෘත්ත තුනම ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17. (a) $\sin(A+B)$ සහ $\cos(A+B)$ වල සම්මත සූත්‍ර භාවිතයෙන් $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan 2\theta+\tan 8\theta+\tan 14\theta=\tan 2\theta\tan 8\theta\tan 14\theta$ සමීකරණය විසඳා $0<\theta<\pi/4$ පරාසය තුළ θ හි අගයන් සොයන්න.

(b) ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්

$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ O ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ $O\hat{A}B=O\hat{B}C=O\hat{C}A$ වන පරිදිය.

OAB හා OBC ත්‍රිකෝණවලට සයින් න්‍යායය යෙදීමෙන් පිළිවෙලින්

$OB=\dfrac{C\sin\theta}{\sin B}$ සහ $OB=\dfrac{a\sin(c-\theta)}{\sin C}$ බව ලබා ගන්න.

එනයින් $\cot A+\cot B+\cot C=\cot\theta$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\cos\left[\pi/6-\cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner