මහානාම විද්‍යාලය

කොළඹ 03

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය , 2020 ඔක්තෝම්බර්

13 ශ්‍රේණිය - අවසාන වාර පරීක්ෂණය ,2020 සැප්තැම්බර්

සංයුක්ත ගණිතය I	10	S	I

B කොටස

11. (a) $ax^2 + bx + c = 0$ යන සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ගනිමු .මෙම මූල දෙකම ධන වීමට අවශ්‍යතාව a, b හා c ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x) = 3x^2 - (p-4)x - (2p+1)$ යැයි සිතමු . $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල දෙකම ධන වීම සඳහා p ට $-\frac{1}{2}$ හා 4 අතර කිසිදු අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල සමානවන සේ p හි අගය සොයන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල වල අගයන් ට වඩා අගය 2කින් වැඩි මූල අගයන් සහිත සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x,y) \equiv 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ යැයි ගනිමු.

$f(x,y) \equiv (ax + by + c)(px + qy + r)$ ලෙස ලිවිය හැකිවන පරිදි λ, a, b, c, p, q හා r හි අගයන් සොයන්න.

12. (a) $n \in Z^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+3)}$ හා $r \in Z^+$ විට $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ලෙස ගනිමු.

$r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r+3}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගය සොයන්න.

ඒ නයින්, $f(r)$, $r \in Z^+$ සඳහා $U_r \equiv f(r) - f(r+1)$ වන විට දී $f(r)$ සොයන්න.

$S_n = \dfrac{11}{18} - \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right]$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ හි අගය ලබාගන්න.

$r \in Z^+$ සඳහා, $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{11}{18} - \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right] \le \dfrac{11}{18}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) පාද n සංඛ්‍යාවක් සහිත බහුඅස්‍රයක් මත, බහු අස්‍රය හා පොදු පාද නොමැති නමුත් පොදු ශීර්ෂ ඇති පරිදි ඇඳිය හැකි ත්‍රිකෝණ ගණන $\dfrac{n(n-4)(n-5)}{6}$ බව පෙන්වන්න.

13. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ලෙස දී ඇත. $A^2 = 4A - 5I$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් A^{-1} සොයන්න. $5A^{-1} = B$ වන සේ B න්‍යාසය සොයන්න

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & c \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ නම් $CB = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ වන සේ a ,b හා c සොයන්න.

(b) ධන නිඛිල දර්ශක සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

i. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දී ඇත. මෙහි $n \in \mathbb{Z}^+$ හා $-\pi < \theta \leq \pi$ වේ. $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ හා $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ බව පෙන්වන්න. $\frac{z^{2n}-1}{z^{2n}+1} = i\tan n\theta$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 + \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -2$ බව පෙන්වන්න.

(c) $z^6 = 1$ සමීකරණයේ මූල $x + iy$ ආකාරයෙන් ලබාගන්න. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ හා $i^2 = -1$ වේ. z_1 හා z_2 යනු $z^6 = 1$ සමීකරණයේ ප්‍රභින්න මූල දෙකක් නම් $|z_1 - z_2|$ සඳහා ගත හැකි අගය 1 , 2 සහ $\sqrt{3}$ බව ආගන්ඩ් සටහන භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

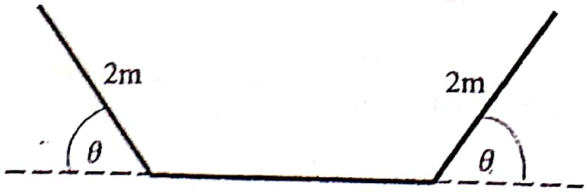
14. (a) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{\cos t - 1}\right)$ නම්, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $x \neq -1$ විට, $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ යැයි ගනිමු.

(i) $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}$, $x \neq -1$ යැයි දී ඇත. $f''(x)$ මගින් $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය දැක්වේ. හැරුම් ලක්ෂ්‍යයන් සහ ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයන්න. පළමු ව්‍යුත්පන්න ක්‍රමය භාවිතයෙන් හැරුම් ලක්ෂ්‍යයන්ගේ ස්වභාවය අපෝහනය කරන්න. දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න. ඒ නයින්, $f(x)$ හි දළ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

(c) මීටර 6ක් දිගැති යකඩ තහඩුවකින් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වතුර බේසමක් සකසා ඇත.



වතුර බේසමට උපරිම පරිමාවක් ලැබෙන පරිදි $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ හි අගය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

15. (a) $\dfrac{1-x}{x(1+x)}$ වීජීය භාගය භින්න භාගවලට වෙන් කරන්න. ඒ නයින්, $\int \dfrac{1-\cos x}{\cos x.(1+\cos x)}\,dx$ අගයන්න.

(b) $x-\dfrac{1}{x}=t$ යන ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ අගයන්න.

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x.\operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{2}\,dx = 2\left[\int \cot\dfrac{x}{2}\,dx - x.\cot\dfrac{x}{2}\right]+C,$

බව පෙන්වන්න. මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. ඒ නයින්, $\int \dfrac{x-\sin x}{\cos x-1}\,dx$ අගයන්න.

(d) $I=\int_0^{\pi} \dfrac{x.\tan x}{\sec x+\cos x}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $I=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් හෝ අන් අයුරකින්, $I=\dfrac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

16. (a) O $(0,0)$ මූලය හරහා $Px+qy+r=0$ රේඛාවට ලම්බව අඳින ලද රේඛාවක් මත වූ සාධාරණ ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක (pt,qt) ආකාරයට දක්වෙන බව සාධනය කරන්න. මෙහි t යනු විචල්‍ය පරාමිතියකි. ඒ නයින්, O මූලයේ සිට එම රේඛාවට ලම්බ දුර $\left|\dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2}}\right|$ බව පෙන්වන්න. මෙම රේඛාව, $x^2+y^2=a^2$ මගින් දෙනු ලබන S නම් වෘත්තය ස්පර්ශ වීම සඳහා අවශ්‍යතාවය $a^2(p^2+q^2)=r^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) S වෘත්තයට $(-a,0)$ හා $(a,0)$ ලක්ෂ්‍යයන් හරහා අඳිනු ලබන ස්පර්ශක පිළිවෙලින් $u_1=0$ හා $u_2=0$ වේ. $lx+my+n=0$ රේඛාව $u_1=0$ හා $u_2=0$ ස්පර්ශක පිළිවෙලින් A හා B හිදී හමුවේ. A හා B හි ඛණ්ඩාංක ලබාගන්න. තවද OA හා OB එකිනෙකට ලම්භක වේ නම්, AB රේඛාව, S වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. S වෘත්තයේ $x-2y+a=0$ ජ්‍යාය, විෂ්කම්භයක් වන වෘත්තයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

Scanned with CamScanner

17. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

(b) $f(x) = 4(sin^4 x + cos^4 x)$ යැයි ගනිමු. $f(x) = 3 + \cos 4x$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = 4(sin^4 x + cos^4 x)$ හි දළ සටහනක් අඳින්න.

එනයින් $f(x) = 2$ සමීකරණයට $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ පරාසය තුල ඇති විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(c) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $2a^2 + 4b^2 + c^2 = 4ab + 2ac$ වේ;

$a = 2b = c$ වන බව පෙන්වන්න. $\cos(A)$, $\cos(B)$ සහ $\cos(C)$ හි අගය සොයන්න.

ඒ නයින්, $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

***

Scanned with CamScanner