රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය
General Certificate of Education (Adv. Level)Examination

13 වන ශ්‍රේණිය - අනාවරණ පරීක්ෂණය 2020 - අගෝස්තු
Grade 13- Screening Test August - 2020

කාලය : පැය 3යි විනාඩි 10යි

සංයුක්ත ගණිතය - I

නම / අංකය :- .... ශ්‍රේණිය...

- A කොටසේ ප්‍රශ්න සියල්ලටමද, B කොටසේ ප්‍රශ්න පහකට ද පිළිතුරු සපයන්න.

A - කොටස

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in Z^+$ සඳහා $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ බව සාධනය කරන්න. $i^2 = -1$, $\theta \in R$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. $P = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. $(P^T)^{-1}$ සොයා, ඒනයින්, $P^{-1} Q P^T = 2P$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $\left\{\dfrac{1+\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}}{1+\sin\dfrac{\pi}{8}-i\cos\dfrac{\pi}{8}}\right\}^{\frac{8}{3}} = -1$ බව පෙන්වන්න.

4. පන්දු යවන්නන් හතර දෙනෙකුගෙන් හා කඩුලු රකින්නන් දෙදෙනෙකුගෙන් සමන්විත හා අන් කිසිවෙකුටත් පන්දු යවන්නකු හෝ කඩුලු රකින්නකු විය නොහැකි පරිදි ක්‍රීඩකයින් එකොළොස් දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමක් ක්‍රීඩකයන් දහසය දෙනෙකු අතරින් තෝරා ගත යුතුව ඇත. අවම වශයෙන් පන්දු යවන්නන් තිදෙනෙකු හා අවම වශයෙන් එක් කඩුලු රකින්නෙකු ඇතුළත් වන පරිදි කණ්ඩායමක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන කොපමණ ද?

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left\{ \dfrac{\sin^{-1}(x - \frac{\pi}{4}) \tan(x - \frac{\pi}{4})}{16x^3 + 8\pi x^2 - 7\pi^2 x + \pi^3} \right\} = \dfrac{1}{20\pi}$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස y අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව ඝන ඒකක $\dfrac{664\pi}{15}$ බව පෙන්වන්න.

7. $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ පරාමිතයක් විට, $x = e^{\theta}\cos\theta$, $y = e^{\theta}\sin\theta$ යන පරාමිතික සමීකරණ මගින් වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. Q නම් ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශකය , O මූලය විට OQ රේඛාවත් සමග සාදනු ලබන කෝණය නියතයක් බව පෙන්වන්න.

8. O මූලයේ දී එකිනෙකට ලම්භක වන සරල රේඛා දෙකක් $2x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාව හා ඡේදනයෙන් සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් සාදයි. එම සරල රේඛා යුගලයේ සමීකරණ සොයන්න.

9. $A \equiv (7, 0)$ සහ $B \equiv (0, -5)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවට ලම්බ වූ සරල රේඛාවක් x අක්ෂය හා y අක්ෂය පිළිවෙලින් P හා Q හි දී ඡේදනය වේ. B හා P හරහා යන සරල රේඛාවට AQ රේඛාව R හිදී හමුවේ නම් R හි පථය සොයන්න.

10. $x \neq 0$ සඳහා, $\sin^{-1}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots\right] + \cos^{-1}\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{4} + \dots\right] = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

Royal College Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination

13 වන ශ්‍රේණිය - අනාවරණ පරීක්ෂණය 2020 අගෝස්තු

Grade 13 Screening Test August 2020

සංයුක්ත ගණිතය - I

- ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

B - කොටස

11. (a) (i) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x - 20$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $[g(x)]^2 + \lambda [g(x)] - 32$ යන ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වන අතර $g(x)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු වර්ගජ ශ්‍රිතයකි.

(ii) ඒනයින්, $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූලයන් දෙකක් පමණක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න.
එම තාත්ත්වික මූලයන් දෙක α හා β නම් $\alpha + \beta$ සහ $\alpha\beta$ හි අගයන් සොයන්න.
තවදුරටත් α හා β ඇසවීමෙන් තොරව එම මූල එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ ලකුණින් යුතු බව පෙන්වන්න.

(iii) තවද $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\dfrac{\beta}{\beta+1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $8x^2 - 19x + 10 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $g(x) = ax^4 - 2x^3 - 4x + b$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x+1)$ යනු $g(x)$ හි සාධකයකි. $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 48 ක් වෙයි. a, b අගයන් සොයන්න.

(ii) $g(x)$ ඒකජ සාධක වලට වෙන් කරන්න. ඒනයින් $g(x) = 0$ හි සියලුම මූල සොයන්න.

(iii) $(x+1)(x-2) = x(x-1) + \mu$ යන ආකාරයෙන් ලිවීමෙන් $g(x)$ ශ්‍රිතය $x^3 + 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

12. (a) (i) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{15}{48} + \dfrac{105}{384} + \ldots$ යන ශ්‍රේණියේ පද n හි එකතුව S_n වෙයි.
එහි r වන පදය වන U_r, r ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
ඒනයින් $r \geq 2$ වන $\dfrac{U_r}{U_{r-1}} = \dfrac{2r-1}{2r}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $r \in Z^+$ වෙයි.

(ii) ඉහත සම්බන්ධතාවය සලකමින්, $U_{r-1} = f(r) - f(r-1)$ වන අයුරින් $f(r)$ සොයන්න.
මෙහි $f(r)$ යනු U_r ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයකි.

තවද $\sum_{r=1}^{n} U_r = (2n+1)U_n - 1$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $r \in Z^+$ වන පරිදි $V_r = \dfrac{2U_r}{(2r-1)U_{r-1}}$ ලෙස අර්ථ දැක්වෙන අනුක්‍රමයෙහි මුල් පද පහ ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ අනන්ත ශ්‍රේණිය සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව සාධනය කරන්න.

(b) $f(x) = |x^2 - 9| + |2x + 7| + x + 10$ හි ප්‍රස්තාරය OXY කාටීසිය අක්ෂ පද්ධතියක තුළ ඇඳ දක්වන්න.

ඒනයින්, $f(x) \leq g(x)$ හි විසඳුම $\dfrac{-7}{2} \leq x \leq 0$ තුළ ඇතිවන ලෙස $g(x)$, වර්ගජ ශ්‍රිතයක් නිර්ණය කරන්න.

13. (a) (i) A හා B යනු ගණය $n \times n$; $n \in Z^{+}$ වන පරිදි වූ සමචතුරශ්‍ර න්‍යාස දෙකක් යැයි ගනිමු.
$A + B = AB$ ලෙස දී ඇත්නම්, $AB = BA$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $\alpha \in R$ වන පරිදි $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

A_α^{-1} පවතින බව පෙන්වා එය සොයන්න.

තවද $A_\alpha^{-1} = A_\alpha^{T}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් $\beta \in R$ වන පරිදි $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha + \beta}$ බව ලබා ගන්න.

(b) (i) $\sqrt{-1-\sqrt{-1-\sqrt{-1-\sqrt{-1\ldots}}}}$ යන්න α හෝ α^2 ආකාර බව පෙන්වන්න. මෙහි α යන්නට එකිනෙකට ප්‍රභින්න සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් පැවතිය හැකි බව පෙන්වා එය, $\alpha = u + vi$; $(u, v) \in \mathrm{R}$, $i^2 = -1$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

එම ප්‍රභින්න සංකීර්ණ සංඛ්‍යා යුගලය ආගන්ඩ් සටහනක නිරූපණය කරන්න. එම ලක්ෂයන් A හා B නම් OAB කොටසේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ක් බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $a, b, c \in R$ වෙයි.

14. (a) $x \neq \pm 2$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq \pm 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, y අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$x \neq \pm 2$ සඳහා $f''(x) = \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නති වර්තන ලක්ෂවල x ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ඒනයින් $(k-2)x^2 + 5 - 4k = 0$, සමීකරණයට

a) එක් තාත්ත්වික විසඳුමක් වත් නොපවතින පරිදි
b) තාත්ත්වික සමපාත මූල පවතින පරිදි
c) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල පවතින පරිදි k ට ගතහැකි අගයන් හෝ අගය පරාසය සොයන්න.

(b) ලෝක සෞඛ්‍ය සංවිධානය (WHO) වාර්තා අනුව, ලෝකයේ සමස්ත $COVID - 19$ ආසාදිතයන් 2020 අප්‍රේල් මස සෑම දිනකම 5% ක අගයකින් වැඩිවෙයි. මෙම මස ආරම්භයේ ආසාදිතයන් ගණන P ලෙස ගෙන මුල් දින තුන තුළ වාර්තාවන ආසාදිතයින් ගණන වෙන වෙනම P ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
ඒනයින් t වන දිනයේ ආසාදිතයින් ගණන x යන්න, $x = (1.05)^t P$ මගින් ලැබෙන බව අපෝහනය කරන්න.
මේ අනුව ඉදිරි සති දෙකක කාලයේ දී ආසාදිතයින් ගණන දෙගුණ වන බව පෙන්වන්න. ($\log_{1.05} 2 \approx 14$ බව උපකල්පනය කරන්න.)
තවද, $P = 1\ 034\ 820$ ලෙස ගෙන අප්‍රේල් මස අවසන් වන විට ලොව ආසාදිතයන් ගණන මිලියන 4 ඉක්මවන බව පෙන්වන්න.
ආසාදිතයින්ගේ වැඩිවීම සන්තතිකව සිදුවන්නේ යැයි ගෙන ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
ඒනයින් ඕනෑම මොහොතක ආසාදිතයින් වර්ධනය වන සීඝ්‍රතාවය $x\ lg\ 1.05$ බව පෙන්වන්න.

15. (a) $\ln|\sec x + \tan x|$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය ලබා ගන්න.

එනයින් $\int \sec(x - \alpha)\,dx$ සොයන්න. $\alpha \in \mathbb{R}$

$3\cos x + 4\sin x$ යන ප්‍රකාශනය $R\cos(x - \beta)$ ආකාරයට $(0 < \beta < \frac{\pi}{2}),\ R \in \mathbb{R})$ ප්‍රකාශ කිරීමෙන්

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{(1+\cos\beta)\cot\beta}{1-\sin\beta}\right|$$ බව පෙන්වන්න.

(b) ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හා කොටස් වශයෙන් අනුකලනය සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\int \sec^3\theta\, d\theta$ සොයන්න.

එනයින් $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln[(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}}]$ බව පෙන්වන්න.

(c) $y_1 = \cos^{-1}x$ සහ $y_2 = \sin^{-1}x$ වනු $x \in [-1, 1]$ තුළ එකම අක්ෂ පද්ධතියක ඇඳ දක්වන්න.

එනයින් $y_1 = \cos^{-1}x$, $y_2 = \sin^{-1}x$, $y = 0$ අතර අන්තර්ගත වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\sqrt{2} - 1$ බව පෙන්වන්න.

16. $P = (x_1, y_1)$ අචල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන විචල්‍ය සරල රේඛාවේ පරාමිතික සමීකරණය $x = x_1 + r\cos\theta$ හා $y = y_1 + r\sin\theta$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග වාමාවර්තව සාදන කෝණයකි. r යනු P සහ Q අතර දුර හා අතර $Q = (x, y)$ වෙයි.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ වෘත්තයක් සහ $L \equiv ax + by + c_2 = 0$ සරල රේඛාවක් ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $S + \lambda L = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි.

$P_0 = (0, a)$ වන විට එය $S_0 = x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි නම්, එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

P_0Q විචල්‍ය සරල රේඛාවේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

Q ලක්ෂ්‍යය $S_0 = 0$ වෘත්තය මත ඇතැයි ගෙන P_0Q ජ්‍යායක් වන විචල්‍ය වෘත්ත වල සාධාරණ සමීකරණය පරාමිතියක් ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

එනයින් PQ එම විචල්‍ය වෘත්තවල විෂ්කම්භයක් වන පරිදි එම පරාමිතියේ අගය $\sin 2\theta - a(1 + \cos 2\theta)$ වන බව පෙන්වන්න.

තවද, එම විචල්‍ය වෘත්තවල සමීකරණ ලබා ගන්න.

17. (a) (i) $m\cot\theta = \cot m\theta$ නම්, $\left(\frac{\cos m\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{m^2}{m^2 + (1-m^2)\sin^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $3\sin 2x + 4\cos 2x - 2\cos x + 6\sin x - 6 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය සහ කෝසයින නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $a^2 + c^2 - 2b^2 = 0$ බව දී ඇත්නම්,

$\cot A + \cot C - 2\cot B = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $f(\theta) = (\cos 2\theta - \cos\theta)^2 + (\sin 2\theta + \sin\theta)^2$ යැයි ගනිමු.

$f(\theta)$ යන්න $A + B\cos C\theta$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B හා $C \in \mathbb{R}$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$0 \le f(\theta) \le 4$ බව අපෝහනය කරන්න.

$-\pi < \theta < \pi$ සඳහා $y = f(\theta)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

එනයින්, $-\pi \le \theta \le \pi$ තුළ $y = k$ සමීකරණයට

(i) විසඳුම් නොමැති වීම.

(ii) විසඳුම් තුනක් පමණක් තිබීම.

(iii) විසඳුම් හතරක් පමණක් තිබීම.

(iv) විසඳුම් හයක් පමණක් තිබීම සඳහා k හි අගය හෝ අගය පරාසය අපෝහනය කරන්න.